Aufgaben 13 Fourier-Transformation
Linearität, Symmetrie, Verschiebung, Skalierung, Faltung, Modulation

Lernziele

- wissen und verstehen, dass der Betrag der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion gerade ist.
- wissen und verstehen, dass das Argument der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion ungerade ist.
- die Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation an einer konkreten Funktion nachprüfen können.
- grafisch beurteilen können, wie sich eine Zeitskalierung bei einer Funktion auf deren Fourier-Transformierte auswirkt.
- die Zeitverschiebungs-, die Zeitskalierungs- und die Linearitäts-Eigenschaft der Fourier-Transformation bei der Bestimmung der Fourier-Transformierten anwenden können.
- die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation kennen und verstehen.
- wissen, wie die Modulation zweier Signale definiert ist.
- die Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation kennen und verstehen.
- das Spektrum eines modulierten Signals mit Hilfe der Modulations-Eigenschaft der Fourier-Transformation bestimmen können.

Aufgaben

13.1 Die Fourier-Transformierte einer reellen Funktion x(t) besitzt die folgenden Symmetrieeigenschaften:

(1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^*$

(2) $|X(\omega)|$ gerade
(3) $\arg\left(X(\omega)\right)$ ungerade

(4) x(t) gerade X(ω) reell X(ω) gerade
(5) x(t) ungerade X(ω) rein imaginär X(ω) ungerade

Im Unterricht wurde die Symmetrieeigenschaft (1) erläutert.

a) Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaften (1), (2) und (3) anhand der folgenden Funktion nach:

$$x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a>0)$$

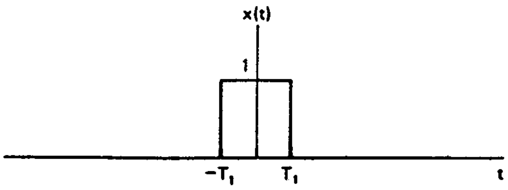
b) Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaft (4) am Beispiel der folgenden geraden Funktion nach:

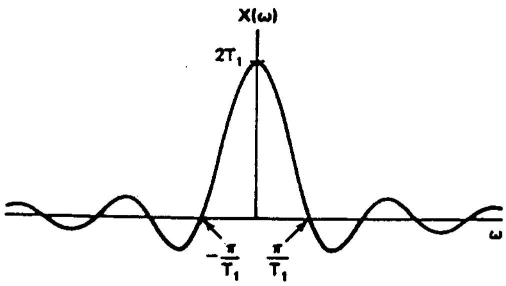
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t|<T_1\right) \\ 0 & \left(|t|>T_1\right) \end{cases} \qquad (T_1>0)$$

Hinweis:
Die Fourier-Transformierten der beiden Funktionen haben Sie bereits in der Aufgabe 10.1 bestimmt.

c) * Zeigen Sie, dass die Symmetrieeigenschaften (2) und (3) aus der Symmetrieeigenschaft (1) folgen.

13.2 Gegeben sind die Grafen der Funktion x(t) und deren Fourier-Transformierten X(ω):





Die Funktion $x_a(t)$ sei definiert durch $x_a(t) := x(at)$ (a R)

a) i) Skizzieren Sie auf einem Blatt nebeneinander die Grafen der Funktionen

$x_a(t)$ für $0<a<1$
$x(t)$
$x_a(t)$ für $a>1$

ii) Skizzieren Sie auf dem gleichen Blatt darunter die Grafen der dazugehörigen Fourier-Transformierten

$X_a(\omega)$ für $0<a<1$
$X(\omega)$
$X_a(\omega)$ für $a>1$

b) Im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation wird auch von der "Inversen Beziehung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich" gesprochen.

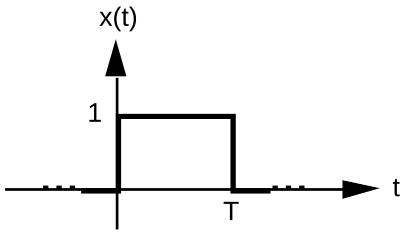
Betrachten Sie die Grafen aus der Aufgabe a). Versuchen Sie mit Hilfe dieser Grafen herauszufinden, was unter der "Inversen Beziehung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich" gemeint sein könnte.

Schreiben Sie das Ergebnis Ihrer Betrachtung in zwei bis drei Sätzen nieder.

13.3 Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ der Funktion $x(t)$.

Benützen Sie dazu lediglich die Fourier-Transformations-Tabelle (kopiertes Blatt), und wenden Sie die Eigenschaften der Fourier-Transformation an.

a)

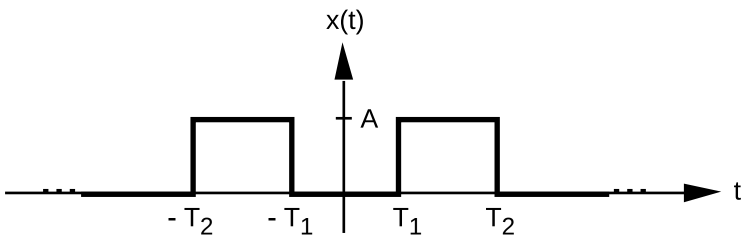


b) $x(t) = (t-4)^2 \, e^{-2(t-4)} \, \varepsilon(t-4)$

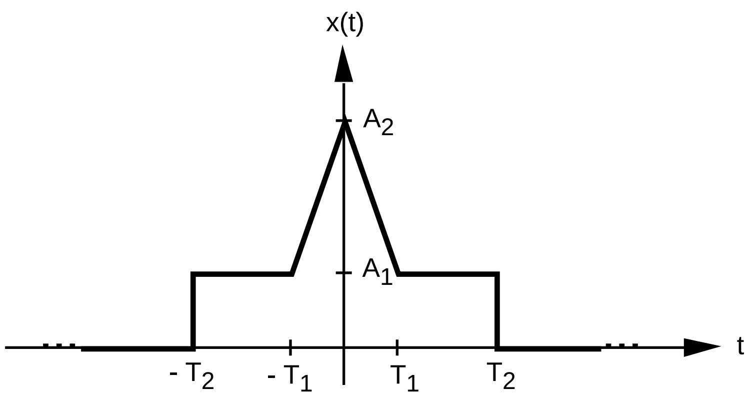
c) $x(t) = A \sin(at+b)$ $(A>0,\ a>0,\ b\neq 0)$

d) $x(t) = 2 \sin(3t+4) + 5 \sin(6t+7)$

e)



f)



13.4 *Einleitung*

Die Fourier-Transformation F hat wie die Laplace-Transformierte L die folgende **Faltungseigenschaft** (ohne Beweis):

$$F\left\{x_1(t) * x_2(t)\right\} = F\left\{x_1(t)\right\} \cdot F\left\{x_2(t)\right\}$$

oder anders geschrieben:

$$x_1(t) * x_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

d.h. die Fourier-Transformierte der Faltung zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der einzelnen Funktionen.

Aufgabe

Prüfen Sie die Faltungseigenschaft der Fourier-Transformation am Beispiel der folgenden beiden Funktionen nach:

$$x_1(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$$
$$x_2(t) = 2e^{-2t}\,\varepsilon(t)$$

Anleitung:

i) Schlagen Sie in der Fourier-Transformations-Tabelle die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ nach.

ii) Schlagen Sie in der Fourier-Transformations-Tabelle die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_2(t)$ nach.

iii) Bestimmen Sie das Produkt $X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$.

iv) Bestimmen Sie das Faltungsprodukt $x(t) := x_1(t) * x_2(t)$ der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, indem Sie $x_1(t)$ und $x_2(t)$ im Zeitbereich falten, d.h. das entsprechende Faltungsintegral berechnen.

v) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$.
Überzeugen Sie sich davon, dass das Resultat mit demjenigen aus iii) übereinstimmt, d.h. dass gilt: $X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$

13.5 *Einleitung*

Unter der **Modulation** eines Signales $x_1(t)$ mit einem zweiten Signal $x_2(t)$ versteht man die Multiplikation von $x_1(t)$ mit $x_2(t)$:

$$x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Bsp: In der Rundfunktechnik wird die Amplitudenmodulation (AM) verwendet. Dabei wird ein Signal $y(t)$ mit einem sogenannten Trägersignal $y_s(t)$ moduliert, und man erhält das modulierte Signal $y_m(t)$:

$y(t) := y_0 \cdot \sin(\omega t)$
$y_s(t) := y_{s0} \cdot \sin(\omega_s t)$ $\quad \omega_s$ = Trägerfrequenz
$y_m(t) = y(t) \cdot y_s(t) = \ldots$

Die Fourier-Transformation F hat die folgende **Modulationseigenschaft** (ohne Beweis):

$$F\left\{x_1(t) \cdot x_2(t)\right\} = \frac{1}{2\pi}\left(F\left\{x_1(t)\right\} * F\left\{x_2(t)\right\}\right)$$

oder anders geschrieben:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2\pi}\left(X_1(\omega) * X_2(\omega)\right)$$

d.h. die Fourier-Transformierte des Produktes zweier Funktionen ist (bis auf einen Faktor $1/2\pi$) gleich der Faltung der Fourier-Transformierten der einzelnen Funktionen.

Aufgabe

Ein beliebiges Signal $x(t)$ mit Spektrum $X(\omega)$ wird mit dem cosinus-förmigen Signal

$$m(t) = \cos(\omega_0 t)$$

moduliert. Man erhält so das modulierte Signal

$$x_m(t) := x(t) \cdot m(t)$$

a) Entnehmen Sie einer Fourier-Transformations-Tabelle das Spektrum $M(\omega)$ von $m(t)$.

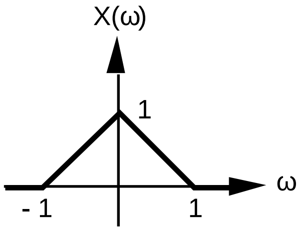
b) Skizzieren Sie den Grafen von $M(\omega)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation das Spektrum $X_m(\omega)$ des modulierten Signals $x_m(t)$.

Drücken Sie also $X_m(\omega)$ durch das als bekannt angenommene Spektrum $X(\omega)$ von $x(t)$ aus.

Hinweis:
Bei der Bestimmung des Faltungsintegrals $X(\omega)*M(\omega)$ kann die Ausblendeigenschaft der δ-Funktion angewendet werden.

d) Skizzieren Sie den Grafen von $X_m(\omega)$ unter der Annahme, dass der Graf von $X(\omega)$ die folgende Form hat:



e) Erklären Sie in eigenen Worten, wie das Spektrum $X_m(\omega)$ aus dem Spektrum $X(\omega)$ hervorgeht, bzw. wie sich das Spektrum eines beliebigen Signals verändert, wenn man das Signal mit einem cosinus-förmigen Signal moduliert.

f) Skizzieren Sie den Grafen von $X_m(\omega)$

i) $x(t)$ wie in d)
$m(t) = \cos(t)$

ii) $x(t)$ wie in d)
$m(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

Lösungen

13.1 a) $X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$

(1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^* = \frac{1}{a-j\omega}$

(2) $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ gerade

(3) $\arg\left(X(\omega)\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ungerade

b) $X(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega} & (\omega\neq 0) \\ 2T_1 & (\omega=0) \end{cases} = 2T_1 \operatorname{sinc}(\omega T_1)$ reell und gerade

c) * ...
Ansatz: $X(\omega) = |X(\omega)|\cdot e^{j\cdot\arg(X(\omega))}$

13.2 a) ...

b) Je breiter der Rechteck (= Graf von x(t)) ist, desto enger ist die sinc-Kurve (= Graf von X(ω)).

Die Auswirkungen einer Veränderung des Signals (hier: Zeitskalierung) sind im Zeit- und im Frequenzbereich entgegengesetzt zueinander.

13.3 a) $X(\omega) = \begin{cases} T\,\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\,e^{-j\omega T/2} & (\omega\neq 0) \\ T & (\omega=0) \end{cases}$

b) $X(\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)^3}\,e^{-j4\omega}$

c) $X(\omega) = A\,j\,\pi\,\left(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a)\right)\,e^{j\omega b/a}$

d) $X(\omega) = j\,\pi\left(2\,\left(\delta(\omega+3) - \delta(\omega-3)\right)\,e^{j\omega 4/3} + 5\,\left(\delta(\omega+6) - \delta(\omega-6)\right)\,e^{j\omega 7/6}\right)$

e) $X(\omega) = \begin{cases} A\left(2T_2\,\frac{\sin(\omega T_2)}{\omega T_2} - 2T_1\,\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega T_1}\right) & (\omega\neq 0) \\ A\,(2T_2 - 2T_1) & (\omega=0) \end{cases}$

f) $X(\omega) = \begin{cases} 2A_1T_2\,\frac{\sin(\omega T_2)}{\omega T_2} + (A_2 - A_1)\,T_1\,\frac{\sin^2\left(\frac{\omega T_1}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_1}{2}\right)^2} & (\omega\neq 0) \\ 2A_1T_2 + (A_2 - A_1)\,T_1 & (\omega=0) \end{cases}$

13.4 i) $X_1(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

ii) $X_2(\omega) = \frac{2}{2+j\omega}$

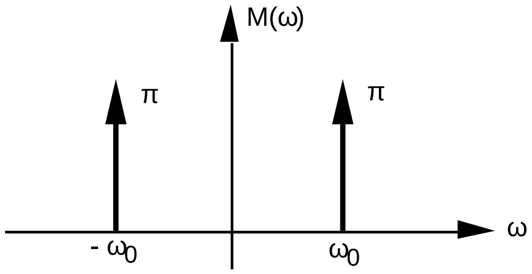
iii) $X_1(\omega)\cdot X_2(\omega) = \frac{2}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$

iv) $x(t) = 2\,(e^{-t} - e^{-2t})\,\varepsilon(t)$

v) $X(\omega) = \dfrac{2}{(1+j\omega)(2+j\omega)} = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$

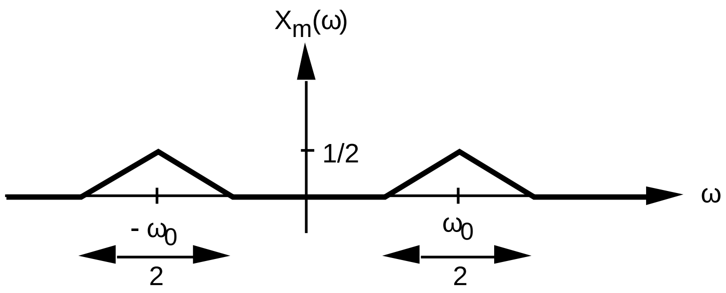
13.5 a) $M(\omega) = \pi\,\delta(\omega+\omega_0) + \pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

b)



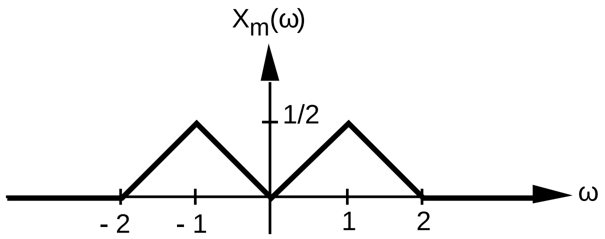
c) $X_m(\omega) = \frac{1}{2}\,X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}\,X(\omega-\omega_0)$

d)



e) ...

f) i)



ii)