

## Aufgaben 11      **Fourier-Transformation** **Fourier-Koeffizienten als Abtastwerte einer Fourier-Transformierten**

### Lernziele

- verstehen, dass die Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion Abtastwerte der Fourier-Transformierten einer Grundperiode der Funktion sind.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.

### Aufgabe

11.1 Die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  einer periodischen Funktion  $\tilde{x}(t)$  mit der Grundperiode  $T_0$  können aus Abtastwerten der Fourier-Transformierten  $X(\omega)$  einer aperiodischen Funktion  $x(t)$  gewonnen werden, welche über ein **beliebiges** Intervall der Länge  $T_0$  gleich der periodischen Funktion  $\tilde{x}(t)$  und ausserhalb dieses Intervalles gleich Null ist (vgl. Unterricht):

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k \cdot \omega_0)$$

Prüfen Sie diese Aussage nach, indem Sie für die untenstehenden Beispiele a) und b) die folgenden Teilaufgaben bearbeiten:

- Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen  $\tilde{x}(t)$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ .
- Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) der Funktion  $\tilde{x}(t)$  aus den reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) oder direkt aus  $\tilde{x}(t)$ .
- Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten  $X_1(\omega)$  und  $X_2(\omega)$  der beiden Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ .

iv) Prüfen Sie nach, dass gilt:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_1(k \cdot \omega_0) = \frac{1}{T_0} X_2(k \cdot \omega_0)$$

$$a) \quad \tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T_0}{4} \\ 0 & \frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0 < t < T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

Hinweise:

- Die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$  der Funktion  $\tilde{x}(t)$  haben Sie bereits in der Aufgabe 8.1 bestimmt.
- Die Fourier-Transformierte  $X_1(\omega)$  von  $x_1(t)$  haben Sie bereits in der Aufgabe 10.1 bestimmt.

$$b) * \quad \tilde{x}(t) = \frac{\hat{x}}{T_0} t \quad (0 < t < T_0), \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0 < t < T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

**Lösungen**

11.1 a) i) ...

$$\frac{1}{2} \quad (k=0)$$

ii)  $c_k = \frac{1}{k} \quad (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots)$

$$-\frac{1}{k} \quad (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots)$$

$$0 \quad (k \text{ gerade } k \neq 0)$$

iii)  $X_1(\omega) = \frac{2 \sin \frac{T_0}{4}}{\omega} \quad (\omega \neq 0)$

$$\frac{T_0}{2} \quad (\omega = 0)$$

$$X_2(\omega) = \frac{j}{\omega} \left( 1 - e^{-j T_0/4} + e^{-j T_0} (e^{j T_0/4} - 1) \right) \quad (\omega \neq 0)$$

$$\frac{T_0}{2} \quad (\omega = 0)$$

iv) ...

b) \* i) ...

ii)  $c_k = j \frac{\hat{x}}{2k} \quad (k \neq 0)$

$$\frac{\hat{x}}{2} \quad (k=0)$$

iii)  $X_1(\omega) = \frac{\hat{x}}{T_0} \frac{1}{2} (e^{-j T_0} (1 + j T_0 \omega) - 1) \quad (\omega \neq 0)$

$$\frac{\hat{x}}{2} T_0 \quad (\omega = 0)$$

$$X_2(\omega) = \frac{\hat{x}}{T_0} \frac{1}{2} e^{-j T_0/2} \left( j \frac{T_0}{2} \omega + 1 - e^{j T_0/2} - j \frac{T_0}{2} \omega + 1 \right)$$

$$+ j \frac{\hat{x}}{T_0} (1 - e^{j T_0/2}) \quad (\omega \neq 0)$$

$$\frac{\hat{x}}{2} T_0 \quad (\omega = 0)$$

iv) ...