Aufgaben 9 — Komplexe Fourier-Reihe
Trigonometrische Funktion, Skalierung

Lernziele

- die komplexen Fourier-Reihe einer Funktion, die aus einer Linearkombination trigonometrischer Funktionen besteht, direkt bestimmen können.
- das Spektrum einer periodischen Funktion als Balkendiagramm grafisch darstellen können.
- beurteilen können, wie sich die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Aufgaben

9.1 Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der nachstehenden Funktionen x(t).
Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- Bestimmen Sie T_0 und ω_0.
- Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_k (k Z).
- Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion x(t) grafisch als Balkendiagramm dar.

a) $x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$

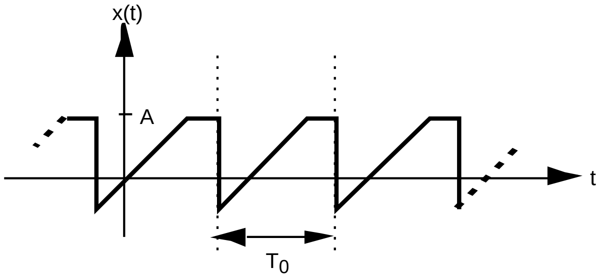
b) $x(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$

c) $x(t) = \cos(4t) + \sin(\pi t)$

d) $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)$

9.2 Wie in der Aufgabe 7.5 sollen Sie in dieser Aufgabe beurteilen, wie sich eine Skalierung bzw. eine Zeitverschiebung einer periodischen Funktion x(t) auf deren Fourier-Koeffizienten auswirkt.

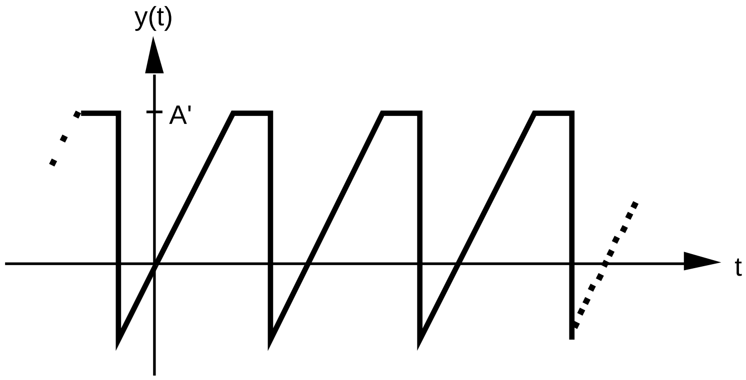
Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion x(t):



Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) von x(t) seien bekannt.

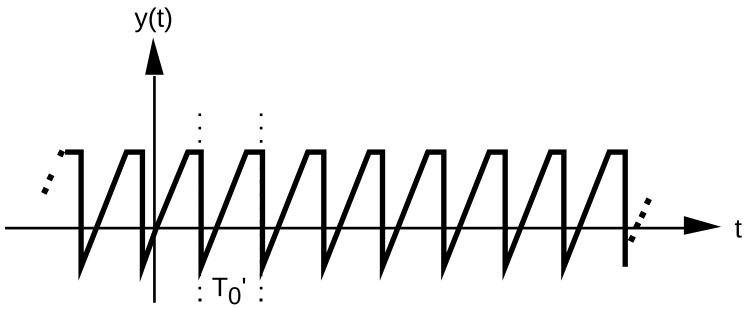
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{ky} (k Z) von y(t) von den Koeffizienten c_k (k Z) von x(t) unterscheiden.

a)



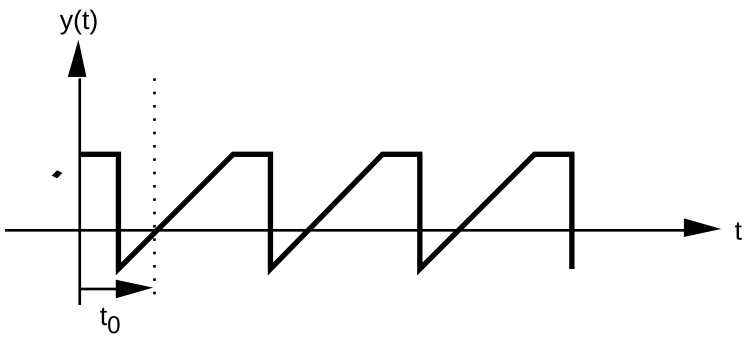
y(t) := r·x(t) mit r>0, d.h. y(t) ist gegenüber x(t) um den Faktor r := A'/A skaliert, d.h. der Graf ist in y-Richtung "gestreckt" (falls r>1) bzw. "gestaucht" (falls r<1).

b)



y(t) := x(r·t) mit r>0, d.h. y(t) ist gegenüber x(t) zeitlich um den Faktor r = T_0/T_0' skaliert, d.h. der Graf ist in der Zeit-Achse "gestaucht" (falls r>1) bzw. "gestreckt" (falls r<1).

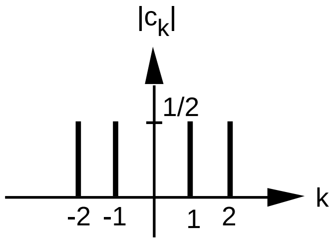
c)

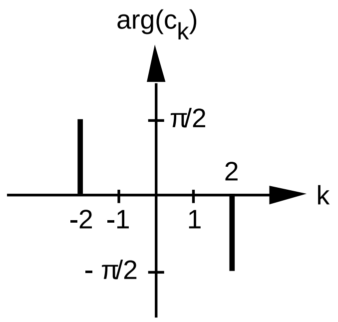


y(t) := x(t-t_0), d.h. y(t) ist gegenüber x(t) zeitlich um t_0 verschoben.

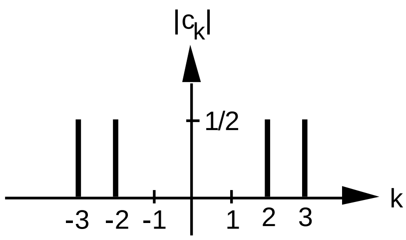
Lösungen

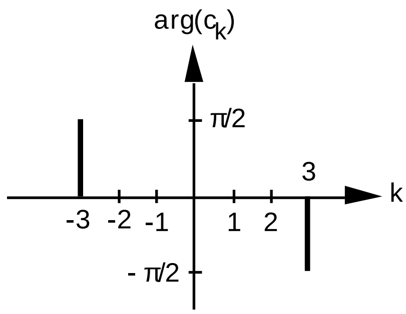
9.1 a) $T_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = 4$ $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{j}{2}$, $c_{-2} = c_2^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 1, \pm 2)$





b) $T_0 = \pi$, $\omega_0 = 2$ $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{j}{2}$, $c_{-3} = c_3^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 2, \pm 3)$

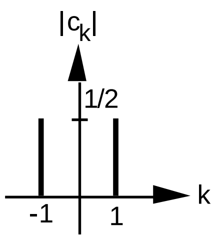


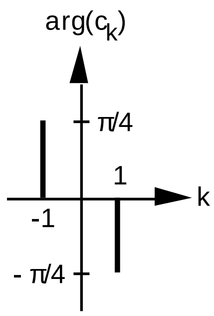


c) x(t) ist nicht periodisch und besitzt daher keine Fourier-Reihe.

d) $T_0 = 8$, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$c_1 = \frac{1}{2} e^{-j\pi/4}$, $c_{-1} = c_1^* = \frac{1}{2} e^{j\pi/4}$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 1)$





9.2 a) Alle Koeffizienten sind um den Faktor r vergrössert (falls r>1) bzw. verkleinert (falls r<1):
$c_{ky} = r \cdot c_k$ (k Z)

b) Die Koeffizienten bleiben unverändert.
$c_{ky} = c_k$ (k Z)

c) (siehe nächste Seite)

c) Eine Zeitverschiebung um t_0 hat für jeden Summanden in der komplexen Fourier-Reihe die folgende Auswirkung:

$c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ $(k \quad Z)$

$\downarrow$

$c_k \cdot e^{jk\omega_0 (t-t_0)}$

$= c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$

$= \left(c_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}\right) \cdot e^{jk\omega_0 t}$

Es folgt also:

$c_{ky} = c_k \cdot e^{-jk\omega_0 t_0}$ $(k \quad Z)$

Der Betrag von c_k bleibt gleich, nur das Argument ändert:

$|c_{ky}| = |c_k|$ $(k \quad Z)$

$\arg(c_{ky}) = \arg(c_k) - k\omega_0 t_0$ $(k \quad Z)$