Aufgaben 5 Reelle Fourier-Reihe
Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten, Fourier-Synthese

Lernziele

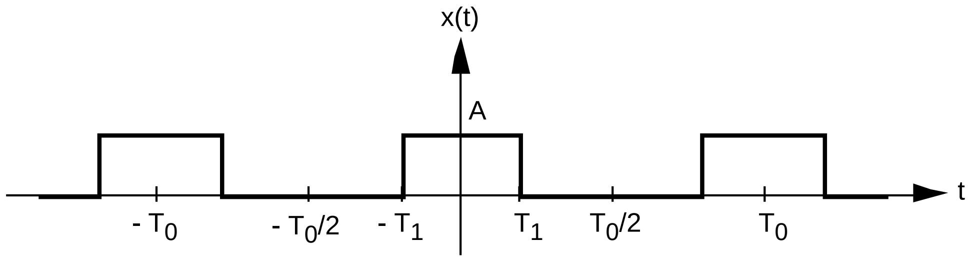
- die reellen Fourier-Koeffizienten einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- verstehen, wie sich die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion aus den einzelnen Fourier-Komponenten zusammensetzt.

Aufgaben

5.1 Gegeben ist die folgende periodische Rechtecks-Funktion x(t) (Beispiel auf den Theorieblättern "Reelle Fourier-Reihe"):

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t|<T_1) \\ 0 & \left(T_1<|t|<\frac{T_0}{2}\right) \end{cases}$$

$$x(t+T_0) = x(t)$$



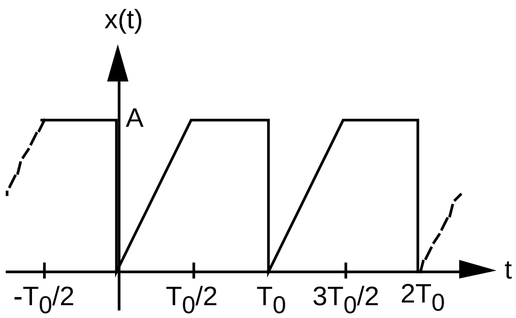
a) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k $(k \in \mathbb{N})$, b_k $(k \in \mathbb{N})$ von x(t) von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.

Betrachten Sie nun den Spezialfall $A := 1$, $T_1 := \frac{T_0}{4}$

b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten, d.h. vereinfachen Sie die Resultate aus a).

c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

5.2 Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion x(t):



a) Geben Sie x(t) analytisch an, d.h. die Funktionsgleichung x(t) = ...

b) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k $(k \in \mathbb{N})$, b_k $(k \in \mathbb{N})$ von x(t) von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.

c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

5.3 Konsultieren Sie im Internet ein Java-Applet, in welchem die **Fourier-Synthese**, d.h. die Bildung der Fourier-Reihe einer periodischen Funktion veranschaulicht wird. Web-Links auf zwei Java-Applets finden Sie unter:

http://www.thomasborer.ch → Mathematik → Dokumente/Links → Fourier-Synthese

Durch Schieberegler können die einzelnen Fourier-Komponenten (sin- bzw. cos-Glieder) eingestellt werden.

Versuchen Sie, die folgenden periodischen Funktionen möglichst gut anzunähern:

- Funktionen der Aufgaben 5.1 und 5.2
- Funktionen, deren reelle Fourier-Reihen bzw. -Koeffizienten tabelliert sind (vgl. Papula 2, Seiten 173 und 174)
- eigene Beispiele von periodischen Funktionen

5.4 * Erstellen Sie mit dem Computerprogramm **MAPLE** ein File, mit welchem die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion x(t) bestimmt werden kann.

Das MAPLE-File sollte die folgenden Anforderungen erfüllen:

- Wahl einer beliebigen periodischen Funktion x(t) durch den Anwender
- Aufzeichnen des Grafen von x(t) über mindestens eine Grundperiode
- Berechnung aller reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N) und b_k (k N) von x(t)
- Berechnung der Näherungsfunktionen $x_N(t)$ für eine beliebige Wahl von N

$$x_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$$

(Die Näherungsfunktion $x_N(t)$ entspricht der reellen Fourier-Reihe von x(t) mit Abbruch nach N Gliedern.)

- Aufzeichnen des Grafen von $x_N(t)$ für N = 0, 1, 2, ... und Vergleich mit dem Grafen von x(t)
- Grafische Ersichtlichkeit, dass sich die Näherungsfunktionen $x_N(t)$ für wachsendes N der Funktion x(t) annähern.
- (evtl. weitere von Ihnen formulierte Anforderungen)

Lösungen

5.1 a)

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\, dt = \ldots = \frac{4AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\, dt = \ldots = \frac{2A\cdot\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt = \ldots = 0$$

b)

$$a_0 = 1$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k = 1, 5, 9, \ldots) \\ -\frac{2}{k\pi} & (k = 3, 7, 11, \ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

c)

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t) + \ldots$$

5.2 a)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T_0}t & \left(0 \le t < \frac{T_0}{2}\right) \\ A & \left(\frac{T_0}{2} \le t < T_0\right) \end{cases}$$

$$x(t+T_0) = x(t)$$

b)

$$a_0 = \frac{3A}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2\pi^2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

c)

$$x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{\pi^2}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega_0 t) + \ldots\right)$$
$$- \frac{A}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \ldots\right)$$

5.3 ...

5.4 MAPLE-Muster-Files, die den formulierten Anforderungen teilweise genügen, finden Sie unter:
http://www.thomasborer.ch → Mathematik → Dokumente/Links

Integraltabelle

$$\int \sin(ax)\, dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$$

$$\int \cos(ax)\, dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$$

$$\int x\cdot\sin(ax)\, dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cdot\cos(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$$

$$\int x\cdot\cos(ax)\, dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\cdot\sin(ax)}{a} + C \qquad (a\neq 0)$$