

Aufgaben 4 **Fourier-Reihen** **Trigonometrische Basisfunktionen, Periodizität, Linearität, Integrale**

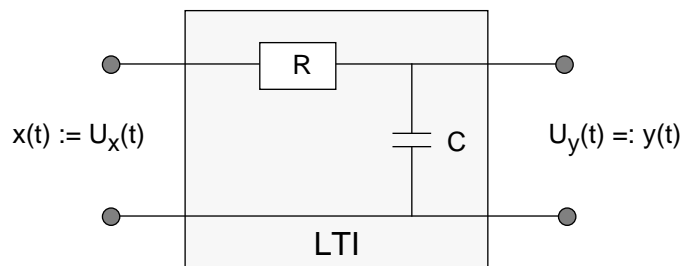
Lernziele

- verstehen, warum es sinnvoll ist, eine Funktion als Linearkombination von geeigneten Basisfunktionen darzustellen.
- verstehen, warum es sinnvoll ist, ein periodisches Signal, welches durch ein lineares, zeitinvariantes System läuft, als Linearkombination von sinusförmigen Basissignalen darzustellen.
- die Grundperiode einer Sinus- bzw. Cosinus-Funktion kennen.
- verstehen, dass die Grundfrequenz der in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion auftretenden Basisfunktionen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz der periodischen Funktion sind.
- einfachere Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle lösen können.

Aufgaben

4.1 **Trigonometrische Basisfunktionen**

Im Unterrichtszimmer ist die folgende RC-Schaltung aufgebaut ($R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$):



Die Schaltung bildet ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System).

Die an der Schaltung angelegte Spannung $U_x(t)$ entspricht dem Eingangssignal $x(t)$.

Die Spannung $U_y(t)$ über dem Kondensator entspricht dem Ausgangssignal $y(t)$.

Ein Funktions-Generator liefert das Eingangssignal $x(t)$. Der zeitliche Verlauf des Eingangssignals $x(t)$ und des Ausgangssignals $y(t)$ können auf einem Kathodenstrahl-Oszillografen (KO) betrachtet werden.

Die Werte von R und C sind gegeben durch $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 100 \text{ nF}$.

- a) Stellen Sie am Funktions-Generator ein **sinusförmiges** Signal mit der Amplitude 0.5 V (1 V peak-to-peak) und der Frequenz 1 kHz ein.

Stellen Sie am KO fest:

- Das Ausgangssignal ist ebenfalls ein **sinusförmiges** Signal
- Die **Frequenz** ist gleich wie beim Eingangssignal. Lediglich **Amplitude** und **Phase** haben sich verändert.

- b) Variieren Sie am Funktions-Generator die Frequenz des Eingangssignals.

Stellen Sie am KO fest:

- Das Ausgangssignal hat immer die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal.
- Die Amplitude und die Phase des Ausgangssignals hängen von der Frequenz ab.

Begründen sie, dass es sich beim betrachteten System um ein Tiefpassfilter handelt.

- c) Stellen Sie nun am Funktions-Generator ein **Dreieckssignal** ein.

Stellen Sie am KO fest:

- Das Ausgangssignal ist **kein Dreieckssignal** mehr.

4.2 Periodizität

- a) Bestimmen Sie die Grundperiode T_0 und die Grundfrequenz ω_0 der folgenden Funktionen:
- i) $x(t) = \sin(t)$
 - ii) $x(t) = \sin(2t)$
 - iii) $x(t) = \sin(3t)$
 - iv) $x(t) = \sin(at)$ ($a \in \mathbb{R}^+$)
- b) $x(t)$ sei irgend eine periodische Funktion mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz ω_0 . Überprüfen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a), dass die folgenden beiden Aussagen richtig sind:
- i) Die Grundfrequenz der Funktion $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ ist gleich gross wie die Grundfrequenz von $x(t)$.
 - ii) Die Grundfrequenz der Funktion $x_k(t) = \sin(k \omega_0 t)$ ist k -mal so gross wie die Grundfrequenz von $x(t)$.
- c) Überlegen Sie sich, dass die Ergebnisse aus a) und b) sinngemäss auch für die entsprechenden Cosinus-Funktionen gelten.

4.3 Linearität

In dieser Aufgabe soll die folgende Analogie aufgezeigt werden:

Ein Signal $x(t)$ durchläuft ein lineares System.

Ein Vektor x wird einer linearen Abbildung (hier: Drehung) unterzogen.

Gegeben sei der folgende Vektor x im dreidimensionalen Raum:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor x soll um 90° um die z -Achse gedreht werden.

Gesucht ist der zu x gehörige Bildvektor y .

- a) Finden Sie eine Methode, um den Bildvektor y möglichst einfach zu bestimmen. Die Methode soll eine Zerlegung von x in möglichst günstige Basisvektoren beinhalten. Beschreiben Sie das Vorgehen in ein paar Stichworten.
- b) Erklären Sie, worin die in der Einleitung dieser Aufgabe erwähnte Analogie besteht.

4.4 Integrale

In der Herleitung der Formeln zur Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten von periodischen Funktionen treten die nachstehenden Integrale auf.

Bestimmen Sie die Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.

Es gilt jeweils $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig, $m \in \mathbb{N}$ beliebig

a)
$$\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) dt$$

b)
$$\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) dt$$

c)
$$\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \sin(m \omega_0 t) dt$$

d)
$$\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$$

e)
$$\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$$

Lösungen

4.1 ...

- 4.2 a) i) $T_0 = 2$ $0 = 1$
 ii) $T_0 = \frac{2}{2} =$ $0 = 2$
 iii) $T_0 = \frac{2}{3}$ $0 = 3$
 iv) $T_0 = \frac{2}{a}$ $0 = a$

b) ...

c) ...

- 4.3 a) - x darstellen als Linearkombination der Basisvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 e_1 + 4 e_2 + 5 e_3$$

- Drehung auf die einzelnen Basisvektoren anwenden:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \\ e_3 & e_3 \end{pmatrix}$$

- Bildvektor als Linearkombination der Bildvektoren der Basisvektoren zusammensetzen:

$$y = 2 e_2 + 4 (-e_1) + 5 e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Analogie in tabellarischer Darstellung:

Signal x(t)	Vektor x
Das Signal x(t) durchläuft ein lineares System.	Der Vektor x wird einer linearen Abbildung unterworfen.
Basis-signale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ...	Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3
Das Signal x(t) wird dargestellt als Linearkombination der Basissignale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ...	Der Vektor wird dargestellt als Linearkombination der Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3
Die Basissignale $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ... verhalten sich bezüglich des betrachteten Systems sehr einfach.	Die Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3 verhalten sich gegenüber der betrachteten Abbildung sehr einfach.
Das Ausgangssignal y(t) setzt sich zusammen als Linearkombination der Ausgangssignale der einzelnen Basissignale.	Der Bildvektor y setzt sich zusammen als Linearkombination der Bildvektoren der einzelnen Basisvektoren.

4.4 a) $\int_0^{T_0} \sin(k \cdot \omega t) dt = 0$

b) $\int_0^{T_0} \cos(k \cdot \omega t) dt = 0$

c) $\int_0^{T_0} \sin(k \cdot \omega t) \cdot \sin(m \cdot \omega t) dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \frac{T_0}{2} & (k=m) \end{cases}$

d) $\int_0^{T_0} \cos(k \cdot \omega t) \cdot \cos(m \cdot \omega t) dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \frac{T_0}{2} & (k=m) \end{cases}$

e) $\int_0^{T_0} \sin(k \cdot \omega t) \cdot \cos(m \cdot \omega t) dt = 0$

Integraltabelle

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C \quad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax) \cos(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C \quad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C \quad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a} + C \quad (a \neq 0)$$