Aufgaben 2 Laplace-Transformation
Linearität, Faltung

Lernziele

- eine Laplace-Transformations-Tabelle zur Bestimmung einer Laplace-Transformierten anwenden können.
- die Linearitäts-Eigenschaft der Laplace-Transformation zur Bestimmung einer Laplace-Transformierten anwenden können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.
- sich das Faltungsintegral zweier Funktionen grafisch vorstellen können.
- die Faltung zweier einfacher Funktionen sowohl grafisch als auch analytisch ausführen können.

Aufgaben

Linearität

2.1 Papula 2: 686/1 (685/1)

Faltung

2.2 Veranschaulichen Sie sich das Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

anhand der beiden konkreten Funktionen

$x_1(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a>0)$

$x_2(t) = \varepsilon(t)$

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

a) Fassen Sie die folgenden Ausdrücke als Funktionen der Variablen τ auf, und skizzieren Sie deren Grafen:

i) $x_1(\tau)$

ii) $x_2(\tau)$

iii) $x_2(-\tau)$

iv) $x_2(t-\tau)$
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle t>0 und t<0.

v) $x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle t>0 und t<0.

b) Finden Sie mit Hilfe der Grafen aus a) eine geometrische Deutung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

c) Überlegen Sie sich allgemein, dass für beliebige rechtsseitige Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ($x_1(t) = x_2(t) = 0$ für t<0) gilt:

$$x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} \int_0^t x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau & (t \geq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

2.3 Die Funktion y(t) sei definiert als Faltung der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t)$$

i) Skizzieren Sie die Grafen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

ii) Bestimmen Sie y(t) auf grafische Weise (wie in der Aufgabe 2.2).

iii) Skizzieren Sie den Grafen von y(t).

a) $x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$

b) $x_1(t) = \varepsilon(t)$

$x_2(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$

c) * $x_1(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ -t+2 & (1 \le t \le 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$

$x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$

2.4 Papula 2: 688/11 (687/11)

Hinweis:
Bestimmen Sie die Faltungsprodukte nicht grafisch (wie in der Aufgabe 2.3), sondern indem Sie die Faltungsintegrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle berechnen.

2.5 Studieren Sie das Java-Applet "Faltung", welches das Faltungsintegral zweier Funktionen veranschaulicht. Sie finden einen Link auf das Applet unter:
http://telecom.tlab.ch/˜borer → Mathematik → Unterlagen (...) → Faltung

Lösungen

2.1 siehe Papula

2.2 a) ...

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$$

ist die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $\tau \rightarrow x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$ und der τ-Achse.

2.3 a) i) ...

ii) $$y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0 \quad t>2) \\ t & (0 \le t \le 1) \\ -t+2 & (1 \le t \le 2) \end{cases}$$

iii) ...

b) i) ...

ii) $$y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ \frac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ \frac{1}{2} & (t>1) \end{cases}$$

iii) ...

c) * i) ...

ii) $$y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 & (1 \le t \le 3) \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8 & (3 \le t \le 4) \\ 0 & (t<0 \quad t>4) \end{cases}$$

iii) ...

2.4 siehe Papula

2.5 ...