

Aufgaben 1 Laplace-Transformation Bestimmung der Laplace-Transformierten, Konvergenzbereich

Lernziele

- eine neue Problemstellung bearbeiten können.
- die (einseitige) Laplace-Transformierte einer einfacheren rechtsseitigen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- verstehen, dass der Konvergenzbereich ein Bestandteil einer Laplace-Transformierten ist.
- den zu einer Laplace-Transformierten gehörigen Konvergenzbereich bestimmen können.

Aufgaben

1.1 Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = e^{-at} \cdot (t) \quad (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \quad \text{mit} \quad (t) := \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad \text{Heaviside-Funktion}$$

Bemerkung:

Im Buch Papula 2 wird die Heaviside-Funktion (t) als Sprungfunktion (t) bezeichnet.

- Skizzieren Sie den Grafen von $x(t)$ für die drei Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$.
- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $X(s)$ von $x(t)$.
Gehen Sie dabei von der Definitionsgleichung der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das uneigentliche Integral von Hand.

1.2 Papula 2: 685/1 (10. Auflage: 683/1) ohne Teilaufgabe d), 685/3 (684/3)

- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $F(s)$ (gemäss Aufgabenstellung Papula).
- Geben Sie den Konvergenzbereich K der Laplace-Transformierten $F(s)$ an.

Hinweis:

Für alle Funktionen f gilt jeweils: $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Lösungen

- 1.1 a) ...
- b) $X(s) = \frac{1}{s+a}$ (Re(s) > -a)
 X(s) nicht definiert (Re(s) = -a)
 Konvergenzbereich $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -a\}$
- 1.2 i) 685/1 (683/1) siehe Papula
- 685/3 (684/3) a) $F(s) = \begin{cases} \dots \text{ (siehe Papula)} & (s < 0) \\ 0 & (s = 0) \\ \dots \text{ (siehe Papula)} & (s > 0) \end{cases}$
- b) $F(s) = \begin{cases} j \frac{aA}{2} & (s = -j \frac{a}{2}) \\ -j \frac{aA}{2} & (s = j \frac{a}{2}) \end{cases}$
- c) siehe Papula
- ii) 685/1 (683/1) a) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$
 b) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -4\}$
 c) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > - \}$
 d) * $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > a\}$
 e) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$
 f) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$
- 685/3 (684/3) a) $K = \mathbb{C}$
 b) $K = \mathbb{C}$
 c) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$