Repetitions-Übung 1 Fourier-Reihen

Aufgaben

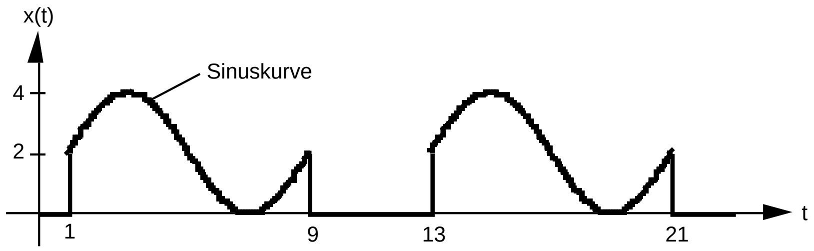
1. Gegeben ist die folgende periodische Funktion x(t):

   $x(t) = 2\sin(3t) + 4\cos(15t)$

   a) Bestimmen Sie alle reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N) und b_k (k N).

   b) Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z).

2. Gegeben ist ein Ausschnitt des Grafen einer periodischen Funktion x(t):



   Die Funktion x(t) kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

   $$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos(k\omega_0 t) + b_k\cdot\sin(k\omega_0 t)\right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0},\ T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

   a) Bestimmen Sie den Fourier-Koeffizienten a_0.

   b) Stellen Sie die für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_k und b_k benötigten Integrale auf. Sie sollen die Integrale nur so weit aufbereiten, dass sie jemand berechnen kann, der nichts von Fourier-Reihen versteht und die Funktion x(t) nicht kennt.

3. Jede periodische Funktion x(t) kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

   $$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos(k\omega_0 t) + b_k\cdot\sin(k\omega_0 t)\right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0},\ T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

   Beurteilen Sie, ob die folgende Behauptung wahr oder falsch ist:
   "Wenn alle Koeffizienten a_k (k N) gleich Null sind, dann kann man folgern, dass x(t) ungerade ist."

4. Das Signal x(t) enthält eine Sinus-Schwingung der Frequenz a und eine Cosinus-Schwingung der Frequenz b:

   $$x(t) = 2\sin\left(at - \frac{\pi}{2}\right) + 6\cos\left(bt + \frac{3\pi}{2}\right)$$

   a) Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) für a = 6 und b = 8.

   b) Beurteilen Sie, ob es noch weitere Werte für a und b gibt, für welche die komplexen Fourier-Koeffizienten des Signals x(t) gleich sind wie im Fall a = 6 und b = 8.
   Geben Sie gegebenenfalls alle möglichen Werte für a und b an.

5. Gegeben ist die folgende periodische Funktion x(t):

$$x(t) = 2 + \sin(9t) - 3\cos(6t)$$

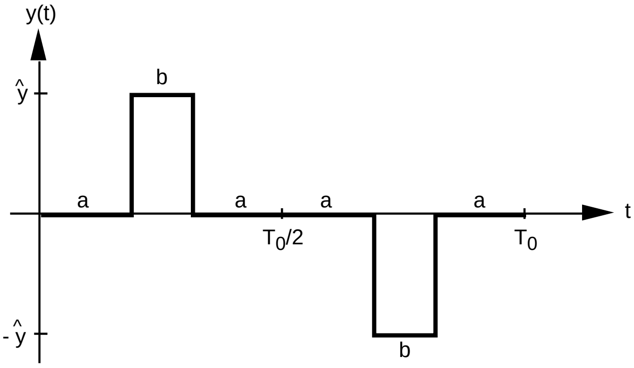
Die Funktion kann sowohl in eine reelle als auch in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k, b_k und c_k der Funktion x(t).

6. In einer Fourier-Reihen-Tabelle ist die folgende periodische Funktion y(t) und deren reelle Fourier-Reihe $FR(y(t))$ aufgeführt:



$$FR(y(t)) = \frac{4\hat{y}}{\pi} \left(\frac{\cos(\omega_0 a)}{1} \sin(\omega_0 t) + \frac{\cos(3\omega_0 a)}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{\cos(5\omega_0 a)}{5} \sin(5\omega_0 t) + \ldots \right)$$

wobei: $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

T_0 = Grundperiode

Prüfen Sie die Fourier-Reihe nach, indem Sie die Fourier-Koeffizienten b_k (= Koeffizienten der Sinus-Glieder) von Hand, d.h. ohne Taschenrechner, berechnen.

Auftretende Integrale müssen nicht auf Grundintegrale zurückgeführt werden, sondern Sie können dazu Integraltafeln verwenden.

Lösungen

1. a) $a_0 = 0$
$a_5 = 4$, $a_k = 0 \; (k \neq 5)$
$b_1 = 2$, $b_k = 0 \; (k \neq 1)$

b) $c_1 = -j$
$c_{-1} = j$
$c_5 = c_{-5} = 2$
$c_k = 0 \; (k \neq \pm 1, \pm 5)$

2. a) $$a_0 = \frac{1}{6} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4} \right) \right) dt = \frac{8}{3}$$

b) $$a_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4} \right) \right) \cos\left(k \frac{\pi}{6} t \right) dt$$

$$b_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4} \right) \right) \sin\left(k \frac{\pi}{6} t \right) dt$$

3. falsch

x(t) ist nur dann ungerade, wenn auch a_0 gleich Null ist.

4. a) $c_3 = c_{-3} = -1$
$c_4 = -3j$
$c_{-4} = 3j$
$c_k = 0 \; (k \neq \pm 3, \pm 4)$

b) $b = \frac{4}{3} a$

5. $a_0 = 2$ $a_2 = -3$ $a_k = 0 \; (k \neq 2)$
$b_3 = 1$ $b_k = 0 \; (k \neq 3)$

$c_0 = 2$ $c_2 = -\frac{3}{2}$ $c_k = 0 \; (k \neq \pm 2, \pm 3)$
$c_{-2} = -\frac{3}{2}$
$c_3 = -\frac{j}{2}$
$c_{-3} = \frac{j}{2}$

6. $$b_k = \begin{cases} 0 & \text{(k gerade)} \\ \frac{4\hat{y}}{k\pi} \cos(k\omega_0 a) & \text{(k ungerade)} \end{cases}$$