Übung 12 Fourier-Transformation
Dirac'sche Delta-Funktion, Fourier-Transformierte einer period. Funkt.

Lernziele

- die Ausblendeigenschaft des Diracstosses verstehen.
- Integrale bestimmen können, in welchen die Dirac'sche Delta-Funktion als Faktor des Integranden auftritt.
- die Fourier-Transformierte einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- die Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion grafisch darstellen können.

Aufgaben

Dirac'sche Delta-Funktion

1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(t)\cdot\delta(t)\ dt$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} 2\cdot\sin(2t)\cdot\delta\left(t-\frac{\pi}{4}\right) dt$

c) $\int_{-\infty}^{0} e^{-t}\cdot\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) dt$

d) $\int_{-1}^{3} e^{-t}\cdot\delta\left(t-\frac{1}{2}\right) dt$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\ d\tau$

f) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\delta(at-b)\ dt$ $(a\neq 0)$

2. Der Diracstoss $\delta(t)$ ist der Grenzwert der Rechtecksfunktion $\delta_\varepsilon(t)$ für $\varepsilon \to 0$ (vgl. Unterricht).

a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte des Diracstosses $\delta(t)$.

b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\delta_\varepsilon(t)$.

c) Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion $\delta_\varepsilon(t)$ für $\varepsilon \to 0$ gegen die Fourier-Transformierte des Diracstosses $\delta(t)$ strebt.

Fourier-Transformierte einer periodischen Funktion

3. * Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ einer periodischen Funktion $x(t)$ gegeben ist durch

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0) \qquad (1)$$

mit: c_k = Fourier-Koeffizienten von $x(t)$
ω_0 = Grundfrequenz von $x(t)$

Vorgehen:
$X(\omega)$ ist genau dann die Fourier-Transformierte von $x(t)$, wenn $X(\omega)$ das Fourier-Integral erfüllt:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (2)$$

Setzen Sie also den in (1) behaupteten Ausdruck für $X(\omega)$ auf der rechten Seite von (2) ein, vereinfachen Sie die rechte Seite, und stellen Sie fest, dass sich $x(t)$ ergibt.

Hinweise:
- Integration und Summation dürfen in ihrer Reihenfolge vertauscht werden.
- Benützen Sie die Ausblendeigenschaft des Diracstosses.

4. Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$.

i) Skizzieren Sie den Grafen von $x(t)$ (ausser bei d)).

ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k $(k \in \mathbb{Z})$ von $x(t)$.

iii) Skizzieren Sie das Spektrum $\{c_k\}$ grafisch als Balkendiagramm.

iv) Geben Sie die zu $x(t)$ gehörige Fourier-Transformierte $X(\omega)$ an.

v) Skizzieren Sie den Grafen von $X(\omega)$.

a) $x(t) = \cos(at)$

b) $$x(t) = \begin{cases} 1 & \left(|t| < \frac{T_0}{4}\right) \\ 0 & \left(\frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2}\right) \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$$

Bemerkung:
Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k haben Sie bereits in der Übung 8 bestimmt.

c) $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

d) $$x(t) = -3 + 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 5\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) - 4\sin(\pi t)$$

Lösungen

1. a) 0

b) 2

c) 0

d) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

e) $x(t)$

f) $\frac{1}{|a|}\, x\left(\frac{b}{a}\right)$

2. a) $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$

b) $\mathcal{F}\left\{\delta_\varepsilon(t)\right\} = \begin{cases} \frac{j}{\omega\varepsilon}\,(e^{-j\omega\varepsilon}-1) & (\omega\neq 0) \\ 1 & (\omega=0) \end{cases}$

c) ...
(Regel von Bernoulli-de l'Hôpital)

3. * ...

4. a) i) ...

ii) $\omega_0 = a$
$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_k = 0$ $(k \neq \pm 1)$

iii) ...

iv) $$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega-k\omega_0) = \pi\,\delta(\omega+\omega_0) + \pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

v) ...

b) i) ...

ii) $$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = \ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = \ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \ldots) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k\neq 0) \end{cases}$$

iii) ...

iv) $$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega-k\omega_0)$$
$$= \ldots - \frac{2}{7}\,\delta(\omega+7\omega_0) + \frac{2}{5}\,\delta(\omega+5\omega_0) - \frac{2}{3}\,\delta(\omega+3\omega_0) + 2\,\delta(\omega+\omega_0) + \pi\,\delta(\omega)$$
$$+ 2\,\delta(\omega-\omega_0) - \frac{2}{3}\,\delta(\omega-3\omega_0) + \frac{2}{5}\,\delta(\omega-5\omega_0) - \frac{2}{7}\,\delta(\omega-7\omega_0) + \ldots$$

v) ...

c) i) ...

ii) $c_k = \frac{1}{T}$ für alle k Z

iii) ...

iv) $$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\,\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \ldots + \frac{2\pi}{T}\,\delta\left(\omega + \frac{6\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\,\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\,\delta(\omega)$$
$$+ \frac{2\pi}{T}\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\,\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{T}\right) + \frac{2\pi}{T}\,\delta\left(\omega - \frac{6\pi}{T}\right) + \ldots$$

v) ...

d) ii) $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$c_0 = -3,\ c_2 = -j,\ c_{-2} = j,\ c_3 = 2j,\ c_{-3} = -2j,\ c_4 = c_{-4} = \frac{5}{2},\ c_k = 0\ (k \neq 0, \pm 2, \pm 3, \pm 4)$

iii) ...

iv) $$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\, c_k\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= 5\pi\,\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{3}\right) - 4\pi j\,\delta(\omega + \pi) + 2\pi j\,\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) - 6\pi\,\delta(\omega)$$
$$- 2\pi j\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\pi j\,\delta(\omega - \pi) + 5\pi\,\delta\left(\omega - \frac{4\pi}{3}\right)$$

v) ...