

Übung 11 Fourier-Transformation Fourier-Koeffizienten als Abtastwerte der FT einer Grundperiode

Lernziele

- verstehen, dass die Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion Abtastwerte der Fourier-Transformierten einer Grundperiode der Funktion sind.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.

Aufgabe

Im Unterricht wurde die folgende Aussage bewiesen:

Die Fourier-Koeffizienten c_k einer periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ mit der Grundperiode T_0 können aus Abtastwerten der Fourier-Transformierten $X(\omega)$ einer aperiodischen Funktion $x(t)$ gewonnen werden, welche über ein **beliebiges** Intervall der Länge T_0 gleich der periodischen Funktion $\tilde{x}(t)$ und ausserhalb dieses Intervalles gleich Null ist:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X(k \cdot \omega_0)$$

Prüfen Sie diese Aussage nach, indem Sie für die untenstehenden Beispiele a) und b) die folgenden Teilaufgaben bearbeiten:

- i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $\tilde{x}(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$.
- ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $\tilde{x}(t)$ aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) oder direkt aus $\tilde{x}(t)$.
- iii) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.
- iv) Prüfen Sie nach, dass gilt:

$$c_k = \frac{1}{T_0} X_1(k \cdot \omega_0) = \frac{1}{T_0} X_2(k \cdot \omega_0)$$

a)
$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T_0}{4} \\ 0 & \frac{T_0}{4} < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0 < t < T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

Hinweise:

- Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $\tilde{x}(t)$ haben Sie bereits in der Übung 8 bestimmt.
- Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ haben Sie bereits in der Übung 10 bestimmt.

b) *
$$\tilde{x}(t) = \frac{\hat{x}}{T_0} t \quad (0 < t < T_0), \quad \tilde{x}(t+T_0) = \tilde{x}(t)$$

$$x_1(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & (0 < t < T_0) \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{(sonst)} \end{cases}$$

Lösungen

a) i) ...

$$\frac{1}{2} \quad (k=0)$$

$$\text{ii) } c_k = \frac{1}{k} \quad (k = \dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots)$$

$$-\frac{1}{k} \quad (k = \dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, \dots)$$

$$0 \quad (k \text{ gerade } k \neq 0)$$

$$\text{iii) } X_1(\omega) = \frac{2 \sin \frac{T_0}{4}}{\omega} \quad (\omega \neq 0)$$

$$\frac{T_0}{2} \quad (\omega = 0)$$

$$X_2(\omega) = \frac{1}{j} \left(1 - e^{-j T_0/4} + e^{-j T_0} (e^{j T_0/4} - 1) \right) \quad (\omega \neq 0)$$

$$\frac{T_0}{2} \quad (\omega = 0)$$

iv) ...

b) * i) ...

$$\text{ii) } c_k = j \frac{\hat{x}}{2k} \quad (k \neq 0)$$

$$\frac{\hat{x}}{2} \quad (k=0)$$

$$\text{iii) } X_1(\omega) = \frac{\hat{x}}{T_0} \frac{1}{2} \left(e^{-j T_0} (1 + j T_0 \omega) - 1 \right) \quad (\omega \neq 0)$$

$$\frac{\hat{x}}{2} T_0 \quad (\omega = 0)$$

$$\frac{\hat{x}}{T_0} \frac{1}{2} e^{-j T_0/2} \left(j \frac{T_0}{2} \omega + 1 - e^{j T_0/2} - j \frac{T_0}{2} \omega + 1 \right)$$

$$X_2(\omega) = \frac{\hat{x}}{T_0} \frac{1}{2} \left(1 - e^{j T_0/2} \right) \quad (\omega \neq 0)$$

$$\frac{\hat{x}}{2} T_0 \quad (\omega = 0)$$

iv) ...