

Übung 9 Komplexe Fourier-Reihe Trigonometrische Funktion, Skalierung

Lernziele

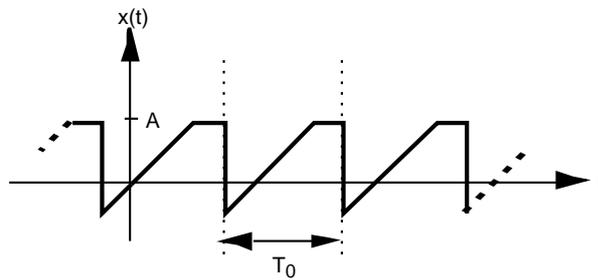
- die komplexen Fourier-Reihe einer Funktion, die aus einer Linearkombination trigonometrischer Funktionen besteht, direkt bestimmen können.
- das Spektrum einer periodischen Funktion als Balkendiagramm grafisch darstellen können.
- beurteilen können, wie sich die komplexen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe der nachstehenden Funktionen $x(t)$. Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:
 - Bestimmen Sie T_0 und φ_0 .
 - Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$).
 - Stellen Sie das Spektrum $\{c_k\}$ der Funktion $x(t)$ grafisch als Balkendiagramm dar.
 - a) $x(t) = \cos(4t) + \sin(8t)$
 - b) $x(t) = \cos(4t) + \sin(6t)$
 - c) $x(t) = \cos(4t) + \sin(t)$
 - d) $x(t) = \cos\left(\frac{1}{4}(t-1)\right)$

2. Wie in der Übung 7, Aufgabe 5 sollen Sie in dieser Aufgabe beurteilen, wie sich eine Skalierung bzw. eine Zeitverschiebung einer periodischen Funktion $x(t)$ auf deren Fourier-Koeffizienten auswirkt.

Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion $x(t)$:



Die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von $x(t)$ seien bekannt.

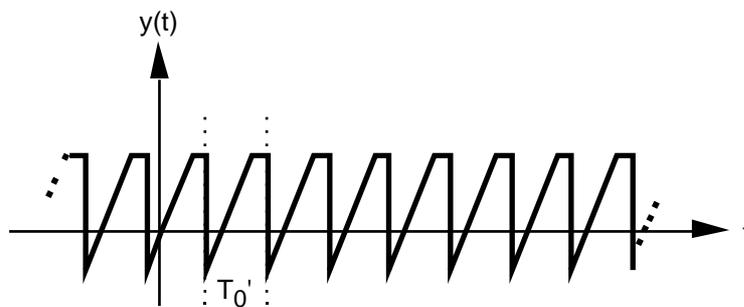
Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{kY} ($k \in \mathbb{Z}$) von $y(t)$ von den Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) von $x(t)$ unterscheiden.

a)



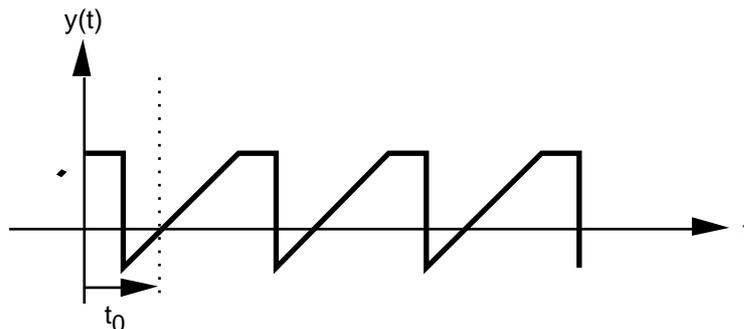
$y(t) := r \cdot x(t)$ mit $r > 0$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um den Faktor $r := A'/A$ skaliert, d.h. der Graf ist in y -Richtung "gestreckt" (falls $r > 1$) bzw. "gestaucht" (falls $r < 1$).

b)



$y(t) := x(r \cdot t)$ mit $r > 0$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um den Faktor $r = T_0/T_0'$ skaliert, d.h. der Graf ist in der Zeit-Achse "gestaucht" (falls $r > 1$) bzw. "gestreckt" (falls $r < 1$).

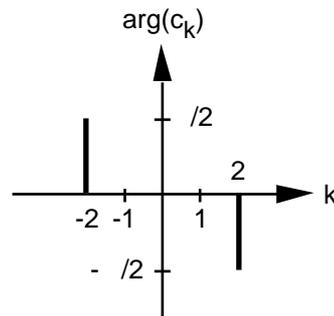
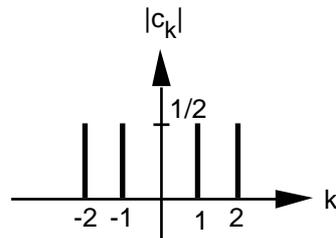
c)



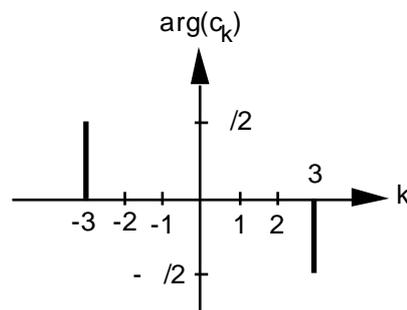
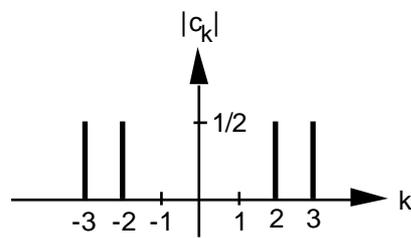
$y(t) := x(t - t_0)$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um t_0 verschoben.

Lösungen

1. a) $T_0 = \frac{1}{2}$, $\omega_0 = 4$ $c_1 = c_{-1} = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{j}{2}$, $c_{-2} = c_2^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 1, \pm 2$)

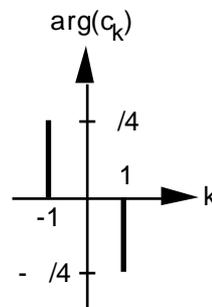
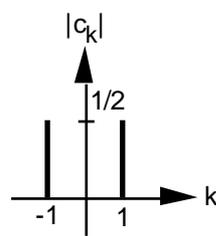


b) $T_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = 2$ $c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{j}{2}$, $c_{-3} = c_3^* = \frac{j}{2}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 2, \pm 3$)



c) $x(t)$ ist nicht periodisch und besitzt daher keine Fourier-Reihe.

d) $T_0 = 8$, $\omega_0 = \frac{1}{4}$
 $c_1 = \frac{1}{2} e^{-j/4}$, $c_{-1} = c_1^* = \frac{1}{2} e^{j/4}$, $c_k = 0$ ($k \neq \pm 1$)



2. a) Alle Koeffizienten sind um den Faktor r vergrößert (falls $r > 1$) bzw. verkleinert (falls $r < 1$):
 $c_{ky} = r \cdot c_k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- b) Die Koeffizienten bleiben unverändert.
 $c_{ky} = c_k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- c) (siehe Seite 4)

- c) Eine Zeitverschiebung um t_0 hat für jeden Summanden in der komplexen Fourier-Reihe die folgende Auswirkung:

$$c_k \cdot e^{jk \cdot 0^t} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} & c_k \cdot e^{jk \cdot 0(t-t_0)} \\ &= c_k \cdot e^{jk \cdot 0^t} \cdot e^{-jk \cdot 0^t t_0} \\ &= (c_k \cdot e^{-jk \cdot 0^t t_0}) \cdot e^{jk \cdot 0^t} \end{aligned}$$

Es folgt also:

$$c_{ky} = c_k \cdot e^{-jk \cdot 0^t t_0} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Der Betrag von c_k bleibt gleich, nur das Argument ändert:

$$|c_{ky}| = |c_k| \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\arg(c_{ky}) = \arg(c_k) - k \cdot 0^t t_0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$