Übung 8 Komplexe Fourier-Reihe
Komplexe Fourier-Koeffizienten, Symmetrie

Lernziele

- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion in die komplexe Fourier-Reihe umformen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die grundlegenden Symmetrieeigenschaften der komplexen Fourier-Koeffizienten einer reellen periodischen Funktion kennen und verstehen.

Aufgaben

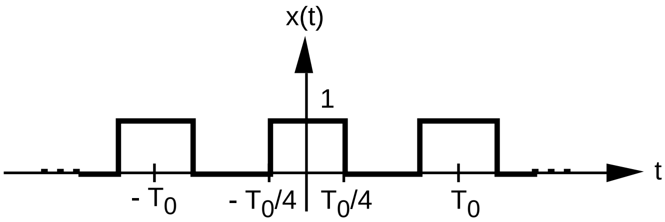
1. Gegeben ist die periodische Funktion x(t) und ihre reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).

   i) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) aus den reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k ($k \in \mathbb{N}$) und b_k ($k \in \mathbb{N}$).

   ii) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) direkt aus der Funktion x(t).

   iii) Schreiben Sie ein paar Glieder der komplexen Fourier-Reihe auf.

   a) x(t) aus Übung 5, Aufgabe 1:

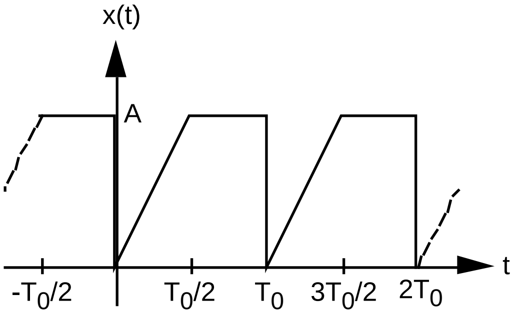


$$a_0 = 1$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & (k = 1, 5, 9, ...) \\ -\frac{2}{k\pi} & (k = 3, 7, 11, ...) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = 0$$

   b) x(t) aus Übung 5, Aufgabe 2:



$$a_0 = \frac{3A}{2}$$

$$a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2\pi^2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$$

$$b_k = -\frac{A}{k\pi}$$

2. Zeigen Sie, dass die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \quad Z$) einer periodischen, reellen Funktion $x(t)$ die folgenden Symmetrie-Eigenschaften besitzen:

a) $x(t)$ gerade $\qquad c_k \quad R$
$x(t)$ ungerade $\qquad c_k$ rein imaginär

Hinweise:
- Gehen Sie von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \quad Z$) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").
- Berücksichtigen Sie die Eigenschaften der reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k ($k \quad N$) und b_k ($k \quad N$) einer geraden bzw. ungeraden Funktion.

b) * $c_{-k} = c_k^*$

Hinweis:
- Gehen Sie von der Definition der komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \quad Z$) aus (siehe Theorie-Blätter "Komplexe Fourier-Reihe").

c) $| c_{-k} | = | c_k |$
$\arg(c_{-k}) = - \arg(c_k)$

Hinweis:
- Gehen Sie von der in b) genannten Symmetrie-Eigenschaft aus.

Integraltabelle

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$$

$$\int x \cdot e^{ax}\, dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right) e^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$$

Lösungen

1. a) i)

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = ..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, ...) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = ..., -9, -5, -1, 3, 7, 11, ...) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

ii) siehe i)

iii) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{\pi} e^{-j\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} e^{j3\omega_0 t} - \frac{1}{3\pi} e^{-j3\omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} e^{j5\omega_0 t} + \frac{1}{5\pi} e^{-j5\omega_0 t} + ...$

b) i)

$$c_k = \begin{cases} \frac{3A}{4} & (k = 0) \\ -\frac{A}{k^2\pi^2} + j\frac{A}{2k\pi} & (k \text{ ungerade}) \\ j\frac{A}{2k\pi} & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

ii) siehe i)

iii) $x(t) = \frac{3A}{4} + \left(-\frac{A}{\pi^2} + j\frac{A}{2\pi}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(-\frac{A}{\pi^2} - j\frac{A}{2\pi}\right) e^{-j\omega_0 t} + j\frac{A}{4\pi} e^{j2\omega_0 t} - j\frac{A}{4\pi} e^{-j2\omega_0 t}$

$+ \left(-\frac{A}{9\pi^2} + j\frac{A}{6\pi}\right) e^{j3\omega_0 t} + \left(-\frac{A}{9\pi^2} - j\frac{A}{6\pi}\right) e^{-j3\omega_0 t} + j\frac{A}{8\pi} e^{j4\omega_0 t} - j\frac{A}{8\pi} e^{-j4\omega_0 t} + ...$

2. a) x(t) gerade $b_k = 0$ (k Z)
c_k R

x(t) ungerade $a_0 = 0$ $a_k = 0$ (k Z)
c_k rein imaginär

b) * ...

c) ...