Übung 6 Reelle Fourier-Reihe
Konstanter Anteil, Spezielle Funktionen, Linearität

PUZZLE

Themen

1 Konstanter Anteil

2 Gerade Funktion, Ungerade Funktion

3 Konstante Funktion, Trigonometrische Funktion

4 Linearität

Lernziele

1 Konstanter Anteil
- verstehen, dass der konstante Anteil in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion der zeitliche Mittelwert der Funktion über eine Grundperiode ist.
- verstehen, dass sich in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion nur der konstante Anteil ändert, wenn man die Funktion mit einer Konstanten addiert.

2 Gerade Funktion, Ungerade Funktion
- verstehen, was eine gerade, ungerade Funktion ist.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion eine reine Cosinus-Reihe ist.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer ungeraden periodischen Funktion eine reine Sinus-Reihe ohne konstanten Anteil ist.

3 Konstante Funktion, Trigonometrische Funktion
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer konstanten Funktion weder Cosinus- noch Sinus-Glieder enthält sondern lediglich einen konstanten Anteil.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Cosinus-Funktion ein einziges Cosinus-Glied enthält.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Sinus-Funktion ein einziges Sinus-Glied enthält.

4 Linearität
- verstehen, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion aus den reellen Fourier-Koeffizienten von Teilfunktionen zusammensetzen.

Aufgaben

1 Konstanter Anteil

Einzelstudium

Die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion besteht aus dem konstanten Anteil $a_0/2$ und aus Cosinus- und Sinus-Gliedern.

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden folgenden Aussagen über den konstanten Anteil wahr sind:

(1) Der konstante Anteil $a_0/2$ ist gleich dem zeitlichen Mittelwert der Funktion x(t) über eine Grundperiode T_0.

(2) Addiert man die Funktion x(t) mit einer Konstanten, so ändert sich in der reellen Fourier-Reihe von x(t) nur der konstante Anteil $a_0/2$. Die Cosinus- und Sinus-Glieder bzw. die Fourier-Koeffizienten a_k (k N) und b_k (k N) bleiben unverändert.

Hinweis:
Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N).

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

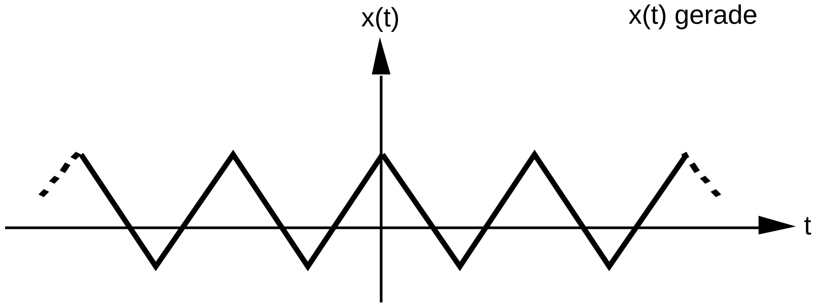
Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 1.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 2, 3, 4 unterrichten.

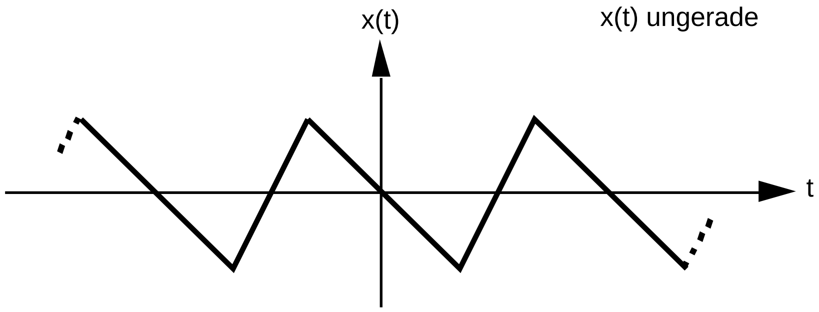
2 Gerade Funktion, Ungerade Funktion

Einzelstudium

Eine Funktion x(t) nennt man eine **gerade** Funktion, falls
- der Graf von x(t) achsensymmetrisch zur Ordinate ("y-Achse") ist.
- für alle t R gilt: x(-t) = x(t)



Eine Funktion x(t) nennt man eine **ungerade** Funktion, falls
- der Graf von x(t) punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
- für alle t R gilt: x(-t) = -x(t)



Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer periodischen, geraden bzw. ungeraden Funktion x(t) wahr sind:

(1) x(t) **gerade** $\Leftrightarrow$ Die Fourier-Koeffizienten b_k (k N) sind alle gleich Null, d.h. die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nebst dem konstanten Anteil nur **Cosinus**-Glieder, jedoch keine Sinus-Glieder:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t)$$

(2) x(t) **ungerade** $\Leftrightarrow$ Die Fourier-Koeffizienten a_0 und a_k (k N) sind alle gleich Null, d.h. die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur **Sinus**-Glieder, jedoch weder einen konstanten Anteil noch Cosinus-Glieder:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$$

Hinweise:
- Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N).
- Legen Sie die Integrationsgrenzen symmetrisch zu t = 0, also $-T_0/2$ und $T_0/2$.
- Überlegen Sie sich, dass ein Integral mit symmetrischen Integrationsgrenzen (z.B. $-T_0/2$ und $T_0/2$) gleich Null ist, falls der Integrand eine ungerade Funktion ist.

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 2.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 3, 4 unterrichten.

3 Konstante Funktion, Trigonometrische Funktion

Einzelstudium

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die drei folgenden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer konstanten bzw. einer trigonometrischen Funktion x(t) wahr sind:

(1) x(t) = c = konst. $\Leftrightarrow$ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält weder Cosinus- noch Sinus-Glieder sondern lediglich einen konstanten Anteil:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \qquad \text{mit } a_0 = 2c$$

Bemerkung:
Eine konstante Funktion kann als eine periodische Funktion mit beliebiger Grundperiode aufgefasst werden.

(2) $x(t) = A \cdot \cos(at)$ $\Leftrightarrow$ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur ein einziges Cosinus-Glied:

$$x(t) = a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) \qquad \text{mit } a_1 = A \text{ und } \omega_0 = a$$

(3) $x(t) = A \cdot \sin(at)$ $\Leftrightarrow$ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur ein einziges Sinus-Glied:

$$x(t) = b_1 \cdot \sin(\omega_0 t) \qquad \text{mit } b_1 = A \text{ und } \omega_0 = a$$

Hinweise:
- Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N).
- Betrachten Sie die Werte der Integrale in der Übung 4, Aufgabe 4.

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 3.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 4 unterrichten.

4 Linearität

Einzelstudium

Eine periodische Funktion x(t) sei darstellbar als Linearkombination zweier periodischer Teilfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$$x(t) = \lambda_1 \cdot x_1(t) + \lambda_2 \cdot x_2(t) \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \quad R)$$

Mit a_0, a_k $(k \quad N)$ und b_k $(k \quad N)$ seien die reellen Fourier-Koeffizienten von x(t) bezeichnet.
Mit $a_{0,1}$, $a_{k,1}$ $(k \quad N)$ und $b_{k,1}$ $(k \quad N)$ seien die reellen Fourier-Koeffizienten von $x_1(t)$ bezeichnet.
Mit $a_{0,2}$, $a_{k,2}$ $(k \quad N)$ und $b_{k,2}$ $(k \quad N)$ seien die reellen Fourier-Koeffizienten von $x_2(t)$ bezeichnet.

Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden drei Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten von x(t), $x_1(t)$ und $x_2(t)$ wahr sind oder nicht:

(1) $a_0 = \lambda_1 \cdot a_{0,1} + \lambda_2 \cdot a_{0,2}$

(2) $a_k = \lambda_1 \cdot a_{k,1} + \lambda_2 \cdot a_{k,2} \quad (k \quad N)$

(3) $b_k = \lambda_1 \cdot b_{k,1} + \lambda_2 \cdot b_{k,2} \quad (k \quad N)$

Die drei Aussagen könnte man etwa wie folgt in einem deutschen Satz zusammenfassen:
Die Fourier-Koeffizienten der Funktion x(t) setzen sich "auf gleiche Art und Weise" aus den Fourier-Koeffizienten der Teilfunktionen zusammen wie sich die Funktion selber aus den Teilfunktionen zusammensetzt.

a) Nehmen Sie an, dass $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die **gleiche** Grundperiode besitzen.

b) * Worin liegt die Problematik, falls $x_1(t)$ und $x_2(t)$ **unterschiedliche** Grundperioden besitzen?

Expertenrunde

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

Unterrichtsrunde

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 4.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 3 unterrichten.