

Übung 5 Reelle Fourier-Reihe Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten, Fourier-Synthese

Lernziele

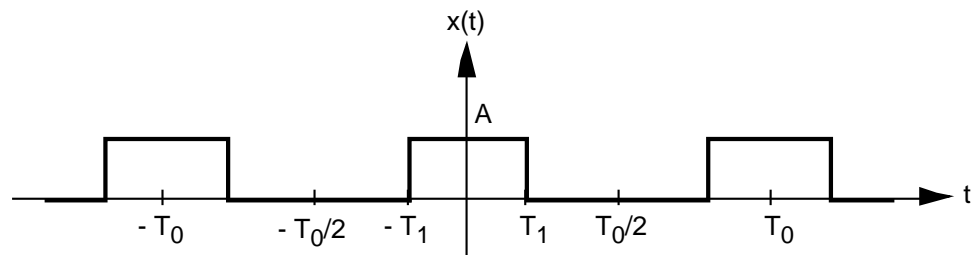
- die reellen Fourier-Koeffizienten einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- verstehen, wie sich die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion aus den einzelnen Fourier-Komponenten zusammensetzt.

Aufgaben

1. Gegeben ist die folgende periodische Rechtecks-Funktion $x(t)$ (Beispiel auf den Theorieblättern "Reelle Fourier-Reihe"):

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$x(t+T_0) = x(t)$$

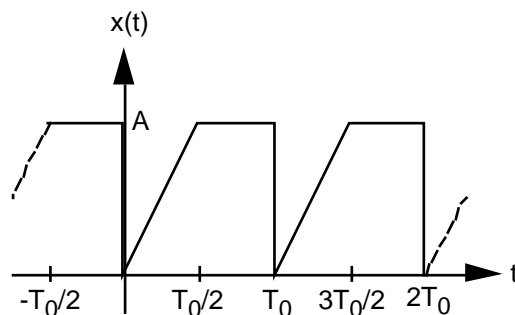


- a) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) von $x(t)$ von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.

Betrachten Sie nun den Spezialfall $A := 1$, $T_1 := \frac{T_0}{4}$

- b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten, d.h. vereinfachen Sie die Resultate aus a).
 c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

2. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion $x(t)$:



- a) Geben Sie $x(t)$ analytisch an, d.h. die Funktionsgleichung $x(t) = \dots$
 b) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) von $x(t)$ von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.
 c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

3. Konsultieren Sie im Internet ein Java-Applet, in welchem die **Fourier-Synthese**, d.h. die Bildung der Fourier-Reihe einer periodischen Funktion veranschaulicht wird. Links auf zwei Java-Applets finden Sie unter:

<http://telecom.tlab.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...) Fourier-Synthese

Durch Schieberegler können die einzelnen Fourier-Komponenten (sin- bzw. cos-Glieder) eingestellt werden.

Versuchen Sie, die folgenden periodischen Funktionen möglichst gut anzunähern:

- Funktionen der Aufgaben 1 und 2
 - Funktionen, deren reelle Fourier-Reihen bzw. -Koeffizienten tabelliert sind (vgl. Papula 2, Seiten 173 und 174)
 - eigene Beispiele von periodischen Funktionen
4. * Erstellen Sie mit dem Computerprogramm **MAPLE** ein File, mit welchem die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion $x(t)$ bestimmt werden kann.

Das MAPLE-File sollte die folgenden Anforderungen erfüllen:

- Wahl einer beliebigen periodischen Funktion $x(t)$ durch den Anwender
- Aufzeichnen des Grafen von $x(t)$ über mindestens eine Grundperiode
- Berechnung aller reellen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k ($k \leq N$) und b_k ($k \leq N$) von $x(t)$
- Berechnung der Näherungsfunktionen $x_N(t)$ für eine beliebige Wahl von N

$$x_N(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t) \right)$$

(Die Näherungsfunktion $x_N(t)$ entspricht der reellen Fourier-Reihe von $x(t)$ mit Abbruch nach N Gliedern.)

- Aufzeichnen des Grafen von $x_N(t)$ für $N = 0, 1, 2, \dots$ und Vergleich mit dem Grafen von $x(t)$
- Grafische Ersichtlichkeit, dass sich die Näherungsfunktionen $x_N(t)$ für wachsendes N der Funktion $x(t)$ annähern.
- (evtl. weitere von Ihnen formulierte Anforderungen)

Lösungen

1. a) $a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt = \dots = \frac{4AT_1}{T_0}$
 $a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) dt = \dots = \frac{2A \cdot \sin(k \cdot \omega_0 T_1)}{k}$
 $b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) dt = \dots = 0$

b) $a_0 = 1$
 $\frac{2}{k} \quad (k = 1, 5, 9, \dots)$
 $a_k = -\frac{2}{k} \quad (k = 3, 7, 11, \dots)$
 $0 \quad (k \text{ gerade})$
 $b_k = 0$

c) $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{5} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{2}{7} \cos(5 \omega_0 t) - \frac{2}{9} \cos(7 \omega_0 t) + \dots$

2. a) $x(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T_0} t & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ A & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$
 $x(t+T_0) = x(t)$

b) $a_0 = \frac{3A}{2}$
 $a_k = \begin{cases} -\frac{2A}{k^2 \cdot 2} & (k \text{ ungerade}) \\ 0 & (k \text{ gerade}) \end{cases}$
 $b_k = -\frac{A}{k}$

c) $x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{2} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{1}{25} \cos(5 \omega_0 t) + \dots \right)$
 $- \frac{A}{2} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2 \omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3 \omega_0 t) + \dots \right)$

3. ...

4. MAPLE-Muster-Files, die den formulierten Anforderungen teilweise genügen, finden Sie unter:
<http://telecom.tlab.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...)

Integraltafel

$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$
 $\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$
 $\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$
 $\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \cdot \sin(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$