

## Übung 1                      Laplace-Transformation Bestimmung der Laplace-Transformierten, Konvergenzbereich

### Lernziele

- eine neue Problemstellung bearbeiten können.
- die (einseitige) Laplace-Transformierte einer einfacheren rechtsseitigen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- verstehen, dass der Konvergenzbereich ein Bestandteil einer Laplace-Transformierten ist.
- den zu einer Laplace-Transformierten gehörigen Konvergenzbereich bestimmen können.

### Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = e^{-at} \cdot (t) \quad (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \quad \text{mit} \quad (t) := \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad \text{Heaviside-Funktion}$$

Bemerkung:

Im Buch Papula wird die Heaviside-Funktion  $(t)$  als Sprungfunktion  $(t)$  bezeichnet.

- a) Skizzieren Sie den Grafen von  $x(t)$  für die drei Fälle  $a > 0$ ,  $a = 0$  und  $a < 0$ .
- b) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte  $X(s)$  von  $x(t)$ .  
Gehen Sie dabei von der Definitionsgleichung der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das uneigentliche Integral von Hand.
2. Papula: 685/1 (10. Auflage: 683/1) ohne Teilaufgabe d), 685/3 (684/3)
- i) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte  $F(s)$  (gemäss Aufgabenstellung Papula).
- ii) Geben Sie den Konvergenzbereich  $K$  der Laplace-Transformierten  $F(s)$  an.

Hinweis:

Für alle Funktionen  $f$  gilt jeweils:  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

**Lösungen**

1. a) ...
- b)  $X(s) = \frac{1}{s+a}$  (Re(s) > -a)  
 X(s) nicht definiert (Re(s) = -a)  
 Konvergenzbereich  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -a\}$
2. i) 685/1 (683/1) siehe Papula
- 685/3 (684/3) a)  $F(s) = \begin{cases} \dots \text{ (siehe Papula)} & (s < 0) \\ 0 & (s = 0) \\ \dots \text{ (siehe Papula)} & (s > 0) \end{cases}$   
 $\left( s \pm j \frac{a}{2} \right)$
- b)  $F(s) = \begin{cases} j \frac{aA}{2} & (s = -j \frac{a}{2}) \\ -j \frac{aA}{2} & (s = j \frac{a}{2}) \end{cases}$
- c) siehe Papula
- ii) 685/1 (683/1) a)  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$   
 b)  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -4\}$   
 c)  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > - \}$   
 d) \*  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > a\}$   
 e)  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$   
 f)  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$
- 685/3 (684/3) a)  $K = \mathbb{C}$   
 b)  $K = \mathbb{C}$   
 c)  $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$