Parseval'sche Beziehung

x(t) aperiodisch

Fourier-Integral $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{j\omega t}\, d\omega$

Fourier-Transformierte $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\, dt$

Parseval'sche Beziehung	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2\, dt$	$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2\, d\omega$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\left(x(t)\right)^*\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\cdot e^{j\omega t}\, d\omega\right)^*\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(X(\omega)\right)^*\cdot e^{-j\omega t}\, d\omega\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega)\right)^*\cdot x(t)\cdot e^{-j\omega t}\, d\omega\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left(X(\omega)\right)^*\cdot x(t)\cdot e^{-j\omega t}\, dt\right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(X(\omega)\right)^*\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-j\omega t}\, dt\right) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left(X(\omega)\right)^*\cdot X(\omega)\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega
\end{aligned}
$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$	=	"Signal", Elektrische Ladungsstromstärke I_Q, Elektrische Spannung U
	$\lvert x(t)\rvert^2$		Leistung zum Zeitpunkt t, wenn das Signal ein Widerstandselement durchläuft $\left(P_{el} = U \cdot I_Q = R \cdot I_Q^2 = \frac{1}{R} U^2\right)$
	$\lvert x(t)\rvert^2 \, dt$		Umgesetzte Energie im Zeitintervall [t,t+dt]
	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$		**Gesamte** umgesetzte **Energie**
	$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 \, d\omega$		
	$\lvert X(\omega)\rvert^2 \, d\omega$		Umgesetzte Energie bezüglich des Frequenzintervalls $[\omega,\omega+d\omega]$
	$\lvert X(\omega)\rvert^2$		**Dichte** der umgesetzten **Energie** bezüglich der Frequenz ω

$|X(\omega)|^2$ wird als **Energiedichtespektrum** bezeichnet.