

Komplexe Fourier-Reihe

Herleitung aus der reellen Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}
 \text{Reelle FR} \quad x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t)) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \frac{1}{2} (e^{jk \omega t} + e^{-jk \omega t}) + b_k \cdot \frac{1}{2j} (e^{jk \omega t} - e^{-jk \omega t}) \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{1}{j} b_k \right) e^{jk \omega t} + \frac{1}{2} \left(a_k - \frac{1}{j} b_k \right) e^{-jk \omega t} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k - j b_k) e^{jk \omega t} + \frac{1}{2} (a_k + j b_k) e^{-jk \omega t} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k - j b_k) e^{jk \omega t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k + j b_k) e^{-jk \omega t} \right) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_k - j b_k) e^{jk \omega t} \right) + \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (a_{-k} + j b_{-k}) e^{jk \omega t} \right)
 \end{aligned}$$

Def.:

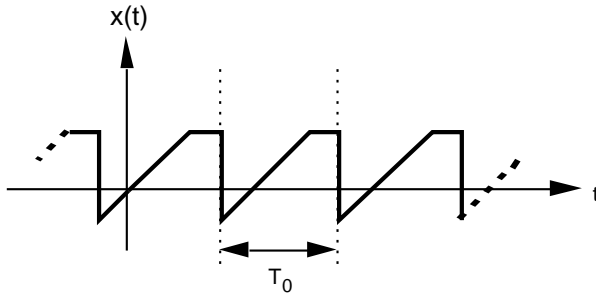
$\frac{a_0}{2}$	$(k=0)$
$\frac{1}{2} (a_k - j b_k)$	$(k > 0)$
$\frac{1}{2} (a_{-k} + j b_{-k})$	$(k < 0)$

$$\begin{aligned}
 &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk \omega t} + \sum_{k=-1}^{\infty} c_k e^{jk \omega t} \\
 &= c_0 e^{j0 \omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk \omega t} + \sum_{k=-1}^{\infty} c_k e^{jk \omega t}
 \end{aligned}$$

$$\text{Komplexe FR} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \omega t}$$

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode T_0



Die Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \omega_0 t} \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **komplexe Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Die Konstanten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) sind die **komplexen Fourier-Koeffizienten**.

$x(t) = c_0$	Konstanter Anteil
$+ c_1 e^{j \omega_0 t} + c_{-1} e^{-j \omega_0 t}$	1. Harmonische, Grundschiwingung
$+ c_2 e^{j 2 \omega_0 t} + c_{-2} e^{-j 2 \omega_0 t}$	2. Harmonische, 1. Oberschiwingung
$+ c_3 e^{j 3 \omega_0 t} + c_{-3} e^{-j 3 \omega_0 t}$	3. Harmonische, 2. Oberschiwingung
$+ \dots$	
$+ c_n e^{j n \omega_0 t} + c_{-n} e^{-j n \omega_0 t}$	n. Harmonische, (n-1). Oberschiwingung
$+ \dots$	

Direkte Bestimmung der komplexen Fourier-Koeffizienten

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \omega_0 t} \quad \left| \cdot e^{-jm \omega_0 t}, m \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\int_0^{T_0} \dots dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jm \omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{T_0} e^{jk \omega_0 t} \cdot e^{-jm \omega_0 t} dt$$

$$= \dots = c_m \cdot T_0 \quad \left| : T_0 \right.$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jk \omega_0 t} dt$$

Da der Integrand die Periode T_0 besitzt, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-jk \omega_0 t} dt$$