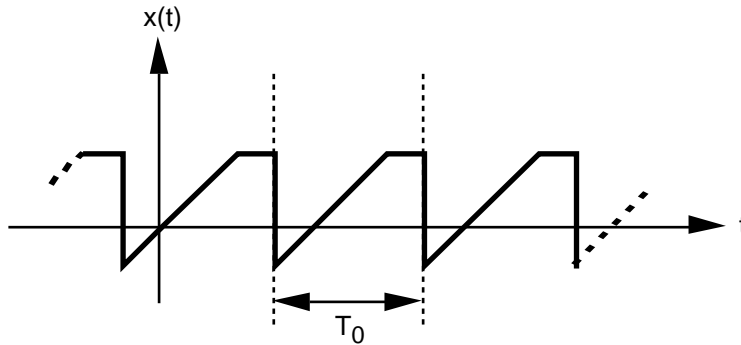


Reelle Fourier-Reihe

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode T_0



Die trigonometrische Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **reelle Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Die Konstanten $a_0, a_k (k \in \mathbb{N}), b_k (k \in \mathbb{N})$ sind die **reellen Fourier-Koeffizienten**.

Die Fourier-Reihen-Darstellung erlaubt es, $x(t)$ in einen konstanten Anteil, in eine Grundschwingung und in Oberschwingungen aufzuteilen:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \quad \text{Konstanter Anteil}$$

$+ a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	1. Harmonische, Grundschwingung
$+ a_2 \cdot \cos(2 \omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2 \omega_0 t)$	2. Harmonische, 1. Oberschwingung
$+ a_3 \cdot \cos(3 \omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3 \omega_0 t)$	3. Harmonische, 2. Oberschwingung
$+ \dots$	
$+ a_n \cdot \cos(n \omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n \omega_0 t)$	n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung
$+ \dots$	

Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \right) dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \frac{\sin(k \omega_0 T_0)}{k \omega_0} + b_k \cdot \frac{-\cos(k \omega_0 T_0)}{k \omega_0}) \right)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \frac{\sin(2\pi k)}{k \omega_0} + b_k \cdot \frac{-\cos(2\pi k)}{k \omega_0}) \right)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \frac{0}{k \omega_0} + b_k \cdot \frac{-1}{k \omega_0}) \right)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\frac{a_0}{2} \cdot T_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k \omega_0} \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 a_k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) & \int_0^{T_0} \dots dt \\
 & & \Big| \cdot \cos(m \cdot \omega_0 t), \quad m \in \mathbb{N} \\
 & & \Big|_0^{T_0} \\
 \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \right) \cdot \cos(m \cdot \omega_0 t) dt \\
 &= \dots = a_m \cdot \frac{T_0}{2} & \Big| \cdot \frac{T_0}{2} \\
 a_k &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_k \quad (k \in \mathbb{N}) \quad x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) & \int_0^{T_0} \dots dt \\
 & & \Big| \cdot \sin(m \cdot \omega_0 t), \quad m \in \mathbb{N} \\
 & & \Big|_0^{T_0} \\
 \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(m \cdot \omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \right) \cdot \sin(m \cdot \omega_0 t) dt \\
 &= \dots = b_m \cdot \frac{T_0}{2} & \Big| \cdot \frac{T_0}{2} \\
 b_k &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

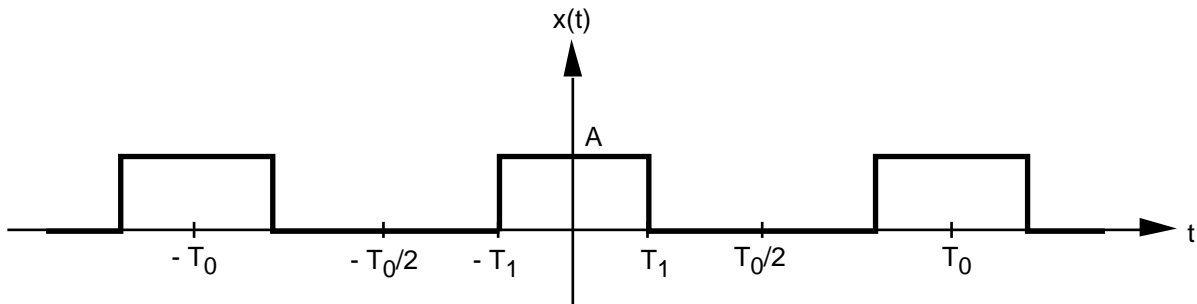
Da die Integranden in den Integralen für a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) die Periode T_0 besitzen, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt$ $a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) dt$ $b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) dt$
--

Beispiel

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$x(t+T_0) = x(t)$$



$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \dots = \frac{4AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) dt = \dots = \frac{2A \cdot \sin(k \cdot \omega_0 T_1)}{k}$$

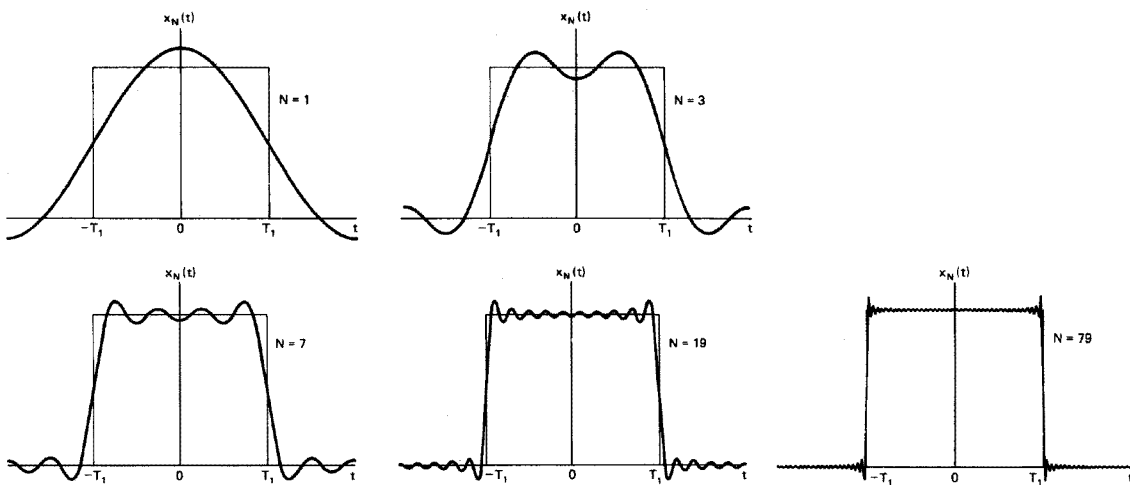
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) dt = \dots = 0$$

$$x(t) = \frac{2AT_1}{T_0} + \frac{2A \cdot \sin(\omega_0 T_1)}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(2 \omega_0 T_1)}{2 \omega_0} \cos(2 \omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(3 \omega_0 T_1)}{3 \omega_0} \cos(3 \omega_0 t) + \dots$$

Endliche Fourier-Reihe als Näherungsfunktion

$$x_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t))$$

x(t) wie im obigen Beispiel



Betrags-/Phasen-Darstellung

Die reelle Fourier-Reihe kann sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung geschrieben werden:

Sinus-/Cosinus-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t)) \quad (a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

Betrags-/Phasen-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k \cdot \omega t + \varphi_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, A_k \geq 0, 0 \leq \varphi_k < 2\pi \text{ oder } -\pi < \varphi_k < \pi)$$

oder

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k \cdot \omega t + \psi_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, B_k \geq 0, 0 \leq \psi_k < 2\pi \text{ oder } -\pi < \psi_k < \pi)$$

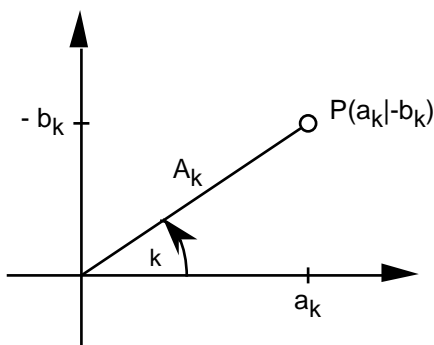
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten A_k und φ_k können a_k und $-b_k$ als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t) = A_k \cdot \cos(k \cdot \omega t + \varphi_k)$$

...

$$a_k = A_k \cdot \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = -A_k \cdot \sin(\varphi_k)$$



$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	
$\varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k}$	$(a_k > 0)$
$\varphi_k = \frac{\pi}{2}$	$(a_k = 0, b_k > 0)$
$\varphi_k = \frac{3\pi}{2}$	$(a_k = 0, b_k < 0)$
$\varphi_k = \arctan \frac{b_k}{a_k} + \pi$	$(a_k < 0)$

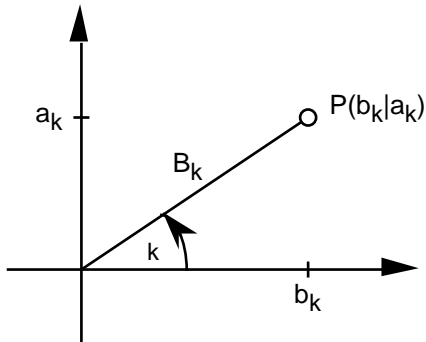
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten B_k und φ_k können b_k und a_k als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \varphi_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \varphi_0 t) = B_k \cdot \sin(k \cdot \varphi_0 t + \varphi_k)$$

...

$$a_k = B_k \cdot \sin(\varphi_k)$$

$$b_k = B_k \cdot \cos(\varphi_k)$$



$$B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \quad (b_k > 0)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} \quad (b_k = 0, a_k > 0)$$

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{2} \quad (b_k = 0, a_k < 0)$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} + \pi \quad (b_k < 0)$$