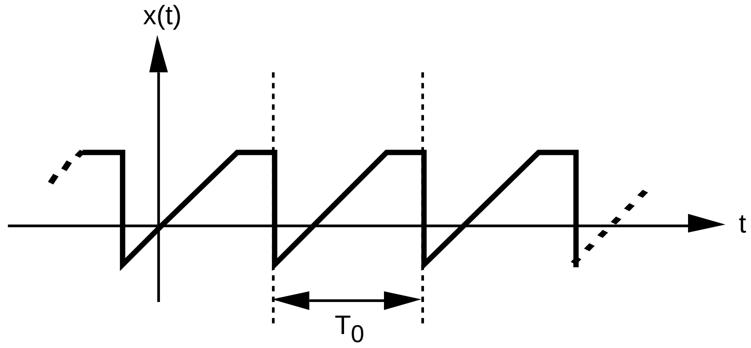
Fourier-Reihen: Einführung

Ausgangspunkt

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal x(t) mit Grundperiode T_0 bzw. Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$



Ziel

Darstellung von x(t) als Linearkombination von trigonometrischen Funktionen bzw. Signalen $\cos(\omega_0 t)$, $\cos(2\omega_0 t)$, $\cos(3\omega_0 t)$, ..., $\sin(\omega_0 t)$, $\sin(2\omega_0 t)$, $\sin(3\omega_0 t)$, ...

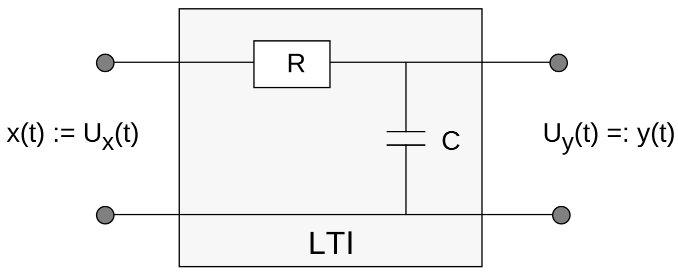
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cdot\cos(\omega_0 t) + a_2\cdot\cos(2\omega_0 t) + a_3\cdot\cos(3\omega_0 t) + \ldots$$
$$+ b_1\cdot\sin(\omega_0 t) + b_2\cdot\sin(2\omega_0 t) + b_3\cdot\sin(3\omega_0 t) + \ldots$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos(k\omega_0 t) + b_k\cdot\sin(k\omega_0 t)\right)$$

Begründung

x(t) sei ein an einem linearen, zeitinvarianten System (LTI-System, engl.: linear time-invariant) angelegtes Eingangssignal, und es soll das dazugehörige Ausgangssignal y(t) bestimmt werden.

Bsp.: Tiefpassfilter als LTI-System



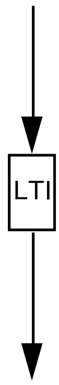
Es ist günstig, x(t) in trigonometrische Teilsignale zu zerlegen. Trigonometrische Signale werden beim Durchgang durch das System nur in ihrer Amplitude und Phase verändert, nicht jedoch in ihrer Frequenz (→ Experiment).

$$\cos(\omega t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow A(\omega)\cdot\cos\big(\omega t-\phi(\omega)\big)$$

$$\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow B(\omega)\cdot\sin\big(\omega t-\varphi(\omega)\big)$$

Das Ausgangssignal y(t) ist wegen der Linearität des Systems eine Linearkombination der Ausgänge zu den einzelnen trigonometrischen Teilsignalen.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right)$$



$$y(t) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k' \cdot \cos(k\omega_0 t - \phi_k) + b_k' \cdot \sin(k\omega_0 t - \varphi_k) \right)$$

Verallgemeinerung der Idee der Fourier-Zerlegung

Ausgangspunkt

Beliebige Funktion bzw. beliebiges Signal x(t)

Ziel

Darstellung von x(t) als Linearkombination von bestimmten Basisfunktionen bzw. Basissignalen $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, ...

$$x(t) = \lambda_1 \cdot \phi_1(t) + \lambda_2 \cdot \phi_2(t) + \lambda_3 \cdot \phi_3(t) + \ldots$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \phi_k(t)$$

Begründung

Soll die Funktion x(t) einer linearen Abbildung T unterzogen werden, so ist es günstig, x(t) in Basisfunktionen $\phi_k(t)$ zu zerlegen, die sich bezüglich der Abbildung T möglichst einfach verhalten.
Die Bildfunktion x'(t) von x(t) ist wegen der Linearität eine Linearkombination der Bildfunktionen $\phi_k'(t)$ von $\phi_k(t)$:

$$T: \quad \phi_k(t) \quad \rightarrow \quad \phi_k'(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \phi_k(t) \quad \rightarrow \quad x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \phi_k'(t)$$