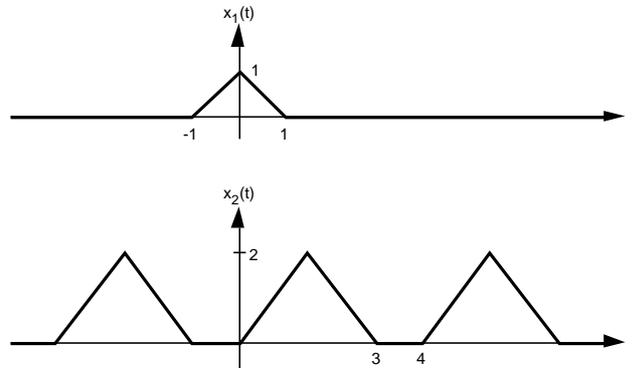


## Repetitions-Übung 2      Fourier-Transformation

### Aufgaben

1. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion  $x_1(t)$  und der periodischen Funktion  $x_2(t)$ :

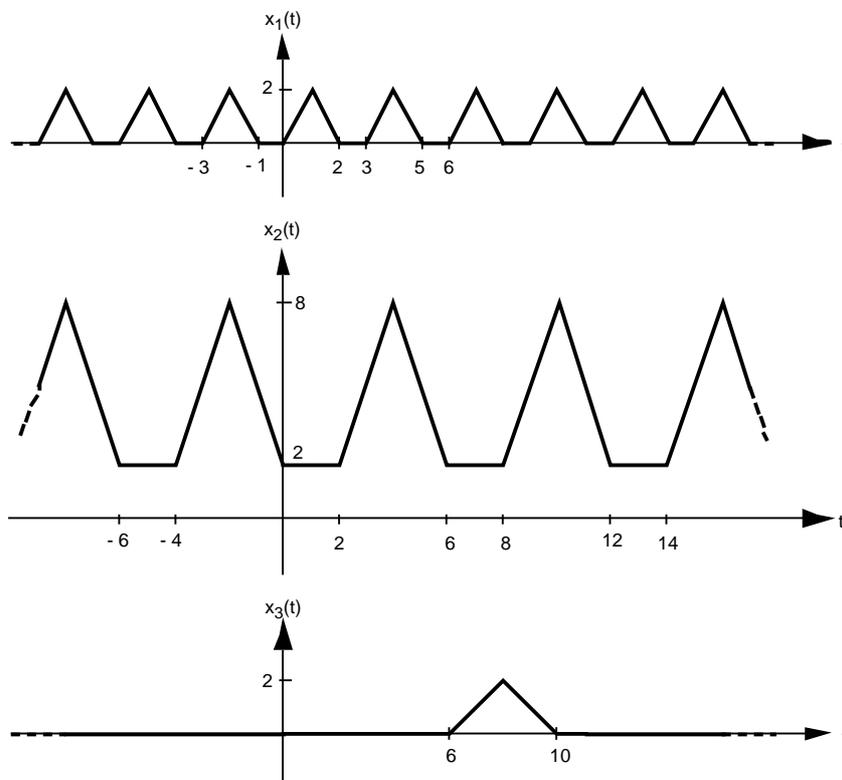


Die Fourier-Transformierte  $X_1(\omega)$  von  $x_1(t)$  sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte  $X_2(\omega)$  von  $x_2(t)$  durch die Fourier-Transformierte  $X_1(\omega)$  von  $x_1(t)$  aus.

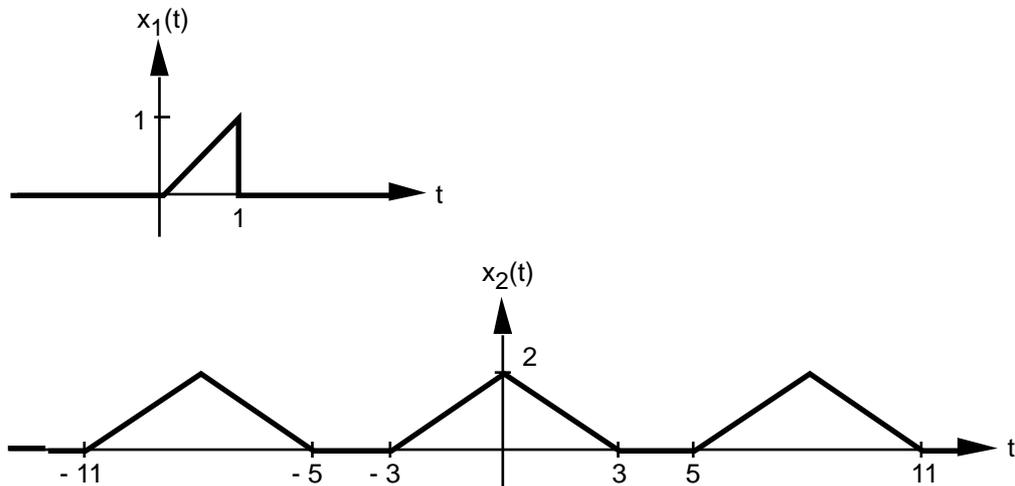
Geben Sie den Zusammenhang zwischen  $X_2(\omega)$  und  $X_1(\omega)$  in Form einer Formel  $X_2(\omega) = \dots$  an, mit welcher man  $X_2(\omega)$  aus  $X_1(\omega)$  bestimmen kann.

2. Gegeben seien die Grafen der beiden periodischen Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  sowie der Graf der aperiodischen Funktion  $x_3(t)$ :



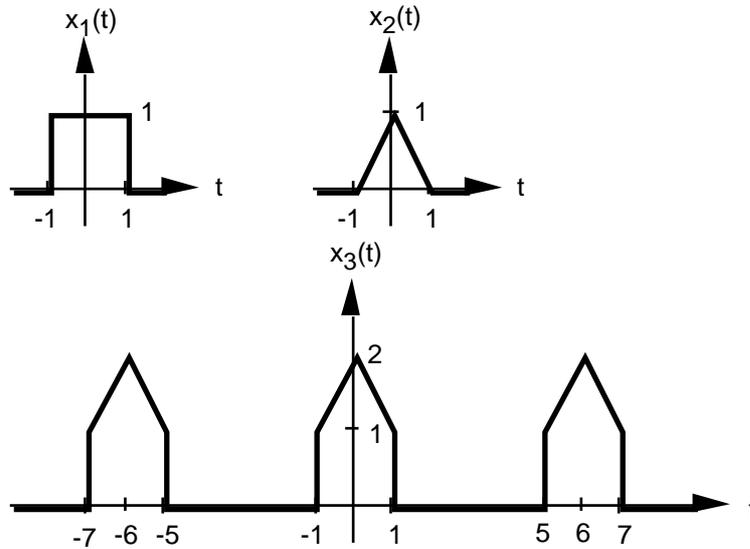
- a) Es sei angenommen, dass man die Fourier-Transformierte  $X_3(\omega)$  der Funktion  $x_3(t)$  kennt.  
 Drücken Sie die Fourier-Koeffizienten  $c_{1k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) der Funktion  $x_1(t)$  durch die Fourier-Transformierte  $X_3(\omega)$  der Funktion  $x_3(t)$  aus.  
 Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten  $c_{1k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) und  $X_3(\omega)$  in Form einer Formel  $c_{1k} = \dots$  an, mit welcher man die Koeffizienten  $c_{1k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) aus  $X_3(\omega)$  bestimmen kann.
- b) Es sei nun angenommen, dass man alle komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_{1k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) der Funktion  $x_1(t)$  kennt.  
 Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_{2k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) der Funktion  $x_2(t)$  durch die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_{1k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) der Funktion  $x_1(t)$  aus.  
 Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Funktionen in Form einer Formel  $c_{2k} = \dots$  an, mit welcher man die Koeffizienten  $c_{2k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) aus den Koeffizienten  $c_{1k}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) bestimmen kann.

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion  $x_1(t)$  und der periodischen Funktion  $x_2(t)$ :



- a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte  $X_1(\omega)$  der Funktion  $x_1(t)$  von Hand.  
 Als Hilfsmittel sind nur eine Integrationstabelle erlaubt, jedoch keine Fourier-Transformations-Tabelle und kein Taschenrechner.
- b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$  der Funktion  $x_2(t)$  aus der Fourier-Transformierten  $X_1(\omega)$  der Funktion  $x_1(t)$ .  
 Sie sollen also die Koeffizienten  $c_k$  weder von Grund auf berechnen noch eine Fourier-Reihen-Tabelle verwenden.  
 Benützen Sie jedoch die Kenntnis von  $X_1(\omega)$  sowie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.  
 Betrachten Sie  $X_1(\omega)$  als bekannt, auch wenn Sie in der Aufgabe a) kein Resultat erhalten haben sollten. Der explizite Ausdruck für  $X_1(\omega)$  ist unwesentlich, da Sie lediglich den Zusammenhang zwischen  $X_1(\omega)$  und den Koeffizienten  $c_k$  aufzeigen sollen.

4. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  sowie der periodischen Funktion  $x_3(t)$ :

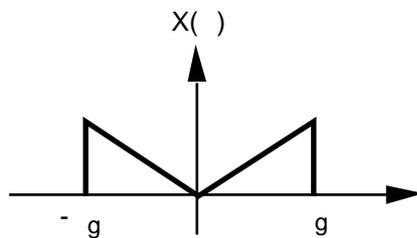


Drücken Sie die Fourier-Transformierte  $X_3(\omega)$  der Funktion  $x_3(t)$  durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten  $X_1(\omega)$  und  $X_2(\omega)$  aus.

Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für  $X_3(\omega)$  berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen  $X_3(\omega)$  und den beiden bekannten Transformierten  $X_1(\omega)$ ,  $X_2(\omega)$  angeben.

5. Ein Modulator bildet das Produkt von zwei Zeitsignalen, dem Nachrichtensignal  $x(t)$  und dem Trägersignal  $s(t)$ . Das Produkt  $y(t) = x(t) \cdot s(t)$  ist das modulierte Signal.

Das Nachrichtensignal habe das folgende Spektrum:

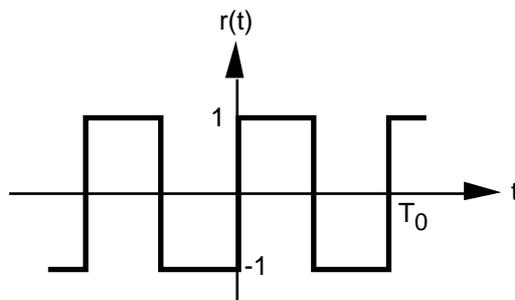


Skizzieren Sie das Fourierspektrum  $Y(\omega)$  des modulierten Signals für die drei Fälle a), b) und c).

a)  $s(t) = K \cos(\omega_0 t)$

b)  $s(t) = K \sin(\omega_0 t)$

c)  $s(t) = r(t)$



Annahme: Es gelte jeweils  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \gg \omega_g$

6. \* Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1 < T < 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20 \cdot t) + 2 \cdot \cos(40 \cdot t)$$

Nun wird das Produkt  $x(t) := x_1(t) \cdot x_2(t)$  gebildet.

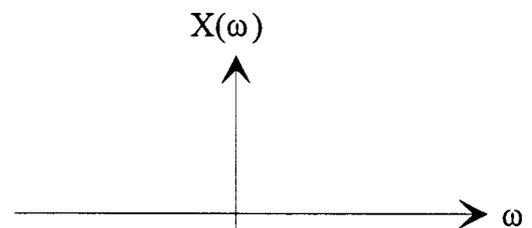
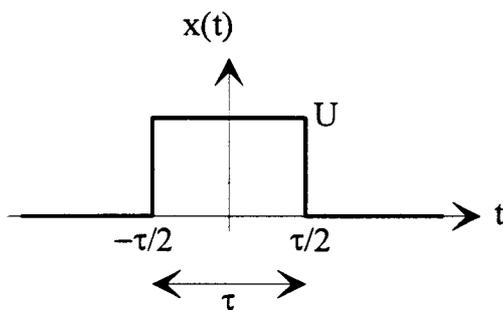
Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte  $X(\omega)$  von  $x(t)$ , und zeichnen Sie den Grafen von  $X(\omega)$ .

Aus Ihrer grafischen Darstellung von  $X(\omega)$  sollte man die Funktionsgleichung von  $X(\omega)$  herauslesen können.

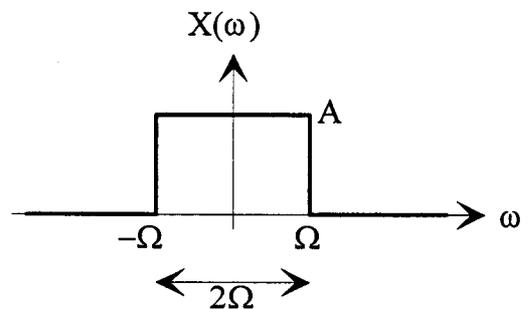
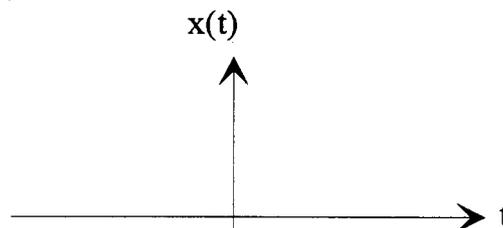
7. Gegeben ist entweder das Zeitsignal  $x(t)$  oder dessen Spektrum  $X(\omega)$ .

Bestimmen Sie das Spektrum  $X(\omega)$  (bei gegebenem  $x(t)$ ) bzw. das Zeitsignal  $x(t)$  (bei gegebenem Spektrum  $X(\omega)$ ), und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von  $X(\omega)$  bzw.  $x(t)$ .

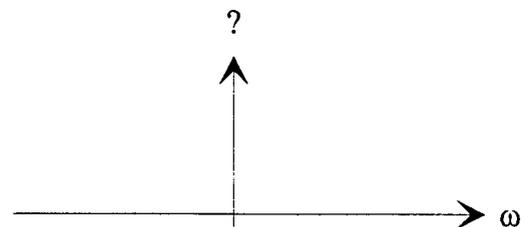
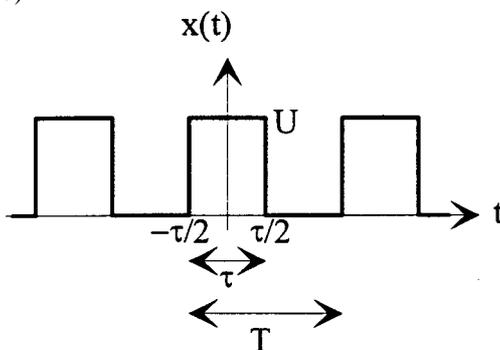
a)



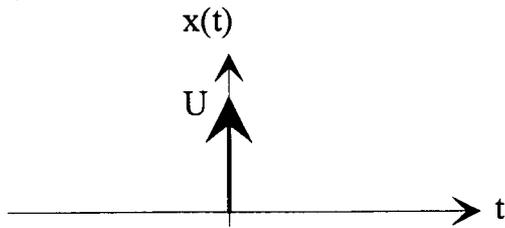
b)



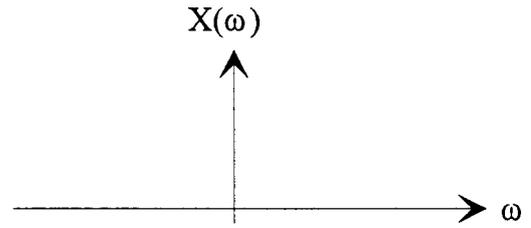
c)



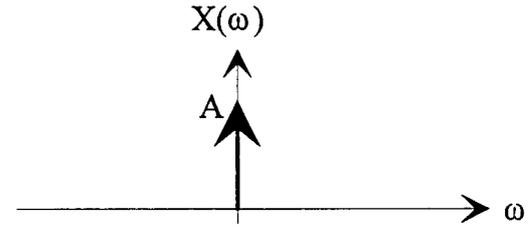
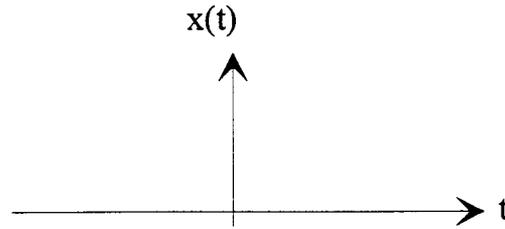
d)



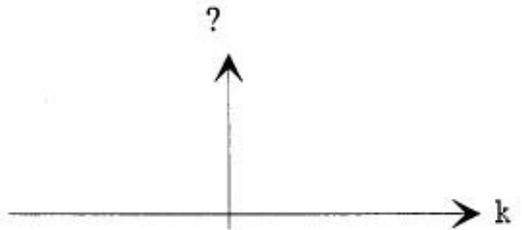
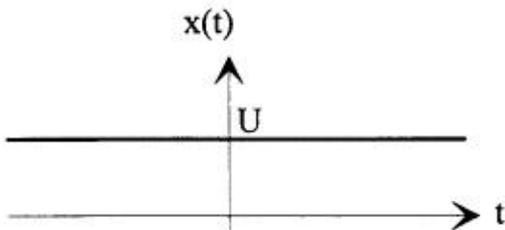
$$x(t) = U \cdot \delta(t)$$



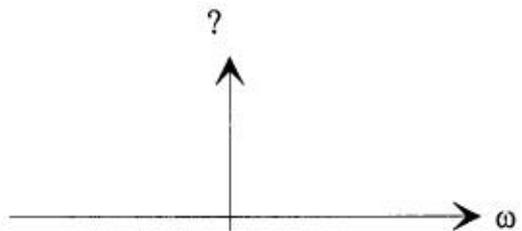
e)



f)

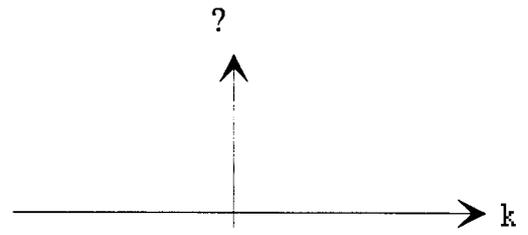
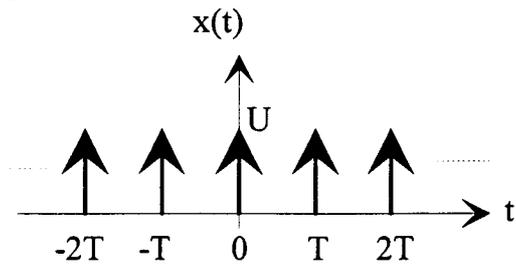


Darstellung als Fourierreihe

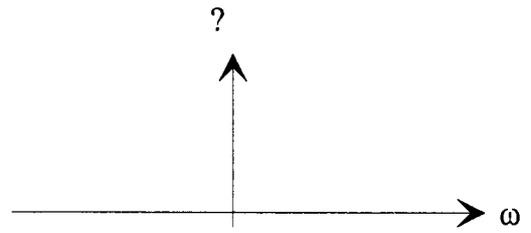


Darstellung als Fouriertransformierte

g)



Darstellung als Fourierreihe



Darstellung als Fouriertransformierte

**Lösungen**

1. 
$$X_2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} e^{-jk(3/4)} X_1\left(k \frac{3}{4}\right) \left( -k \frac{3}{2} \right)$$

2. a) 
$$c_{1k} = \frac{1}{6} X_3\left(k \frac{3}{3}\right)$$
      b) 
$$c_{2k} = \frac{3}{3} c_{10} + 2 \quad (k=0)$$
  

$$3 e^{-jk(2/3)} c_{1k} \quad (k \neq 0)$$

3. a) 
$$X(\omega) = -\frac{1}{2} (e^{-j\omega} (-j\omega - 1) + 1) \quad (\omega \neq 0)$$
  

$$\frac{1}{2} \quad (\omega = 0)$$

b) 
$$c_k = \frac{3}{4} e^{jk(3/4)} X_1\left(k \frac{3}{4}\right) + e^{-jk(3/4)} X_1\left(-k \frac{3}{4}\right)$$

4. 
$$X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} X_1\left(k \frac{3}{3}\right) + X_2\left(k \frac{3}{3}\right) \left( -k \frac{3}{3} \right)$$

5. a) 
$$Y(\omega) = \frac{K}{2} (X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0))$$
      b) 
$$Y(\omega) = j \frac{K}{2} (X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0))$$
  
 c) \* ...

6. \* 
$$X(\omega) = \text{sinc}(\omega + 20) + \text{sinc}(\omega - 20) + 2 \text{sinc}(\omega + 40) + 2 \text{sinc}(\omega - 40)$$

7. a) 
$$X(\omega) = \frac{U \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}}{U} \quad (\omega \neq 0) = U \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
  

$$U \quad (\omega = 0)$$

b) 
$$x(t) = \frac{\frac{A}{A} \frac{\sin(\omega t)}{t}}{\frac{A}{A}} \quad (t \neq 0) = \frac{A}{A} \text{sinc}(\omega t)$$
  

$$\frac{A}{A} \quad (t=0)$$

c) 
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} U \text{sinc} \frac{k \omega_0}{2} \quad (\omega = -k \omega_0) \quad \omega_0 := \frac{2}{T}$$

d) 
$$X(\omega) = U$$

e) 
$$x(t) = \frac{A}{2}$$

f) Fourier-Reihe:  $c_0 = U, c_k = 0 \quad (k \neq 0)$   
 Fourier-Transformierte:  $X(\omega) = 2 U \delta(\omega)$

g) Fourier-Reihe:  $c_k = \frac{U}{T} \delta(k - Z)$   
 Fourier-Transformierte:  $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} U \delta(\omega - k \omega_0) \quad \omega_0 := \frac{2}{T}$