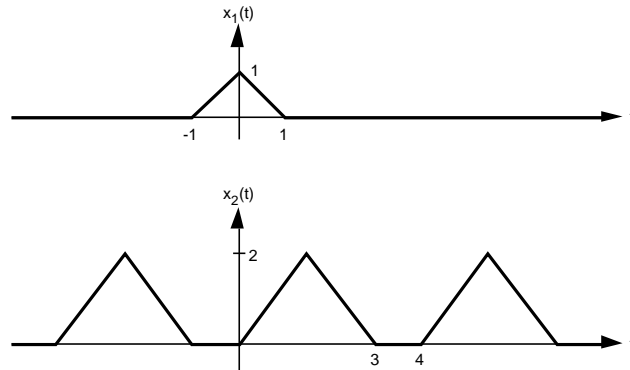


Repetitions-Übung 2 Fourier-Transformation

Aufgaben

1. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:

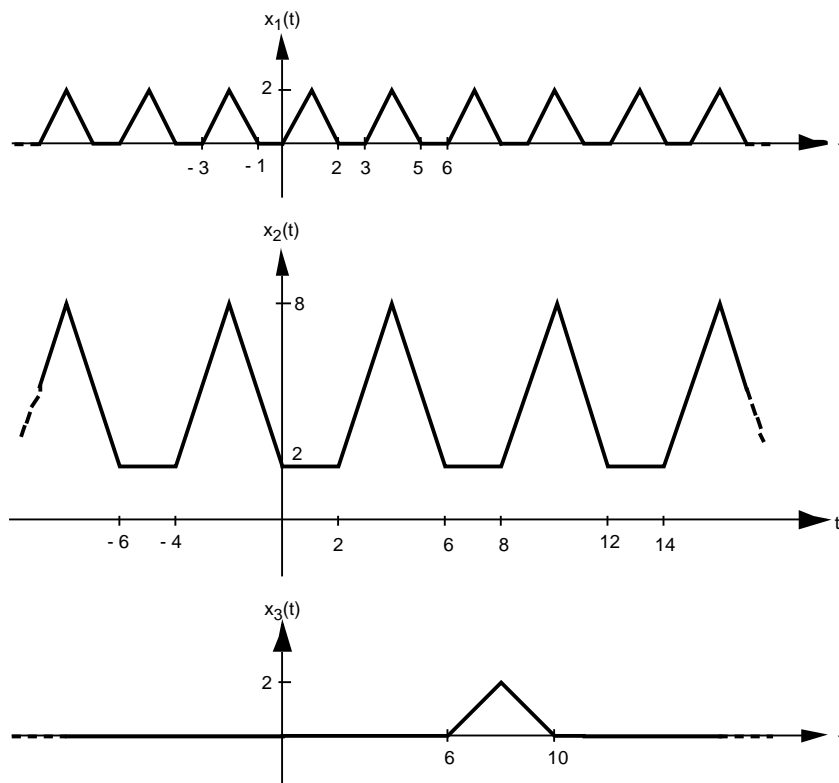


Die Fourier-Transformierte $X_1(\)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\)$ von $x_1(t)$ aus.

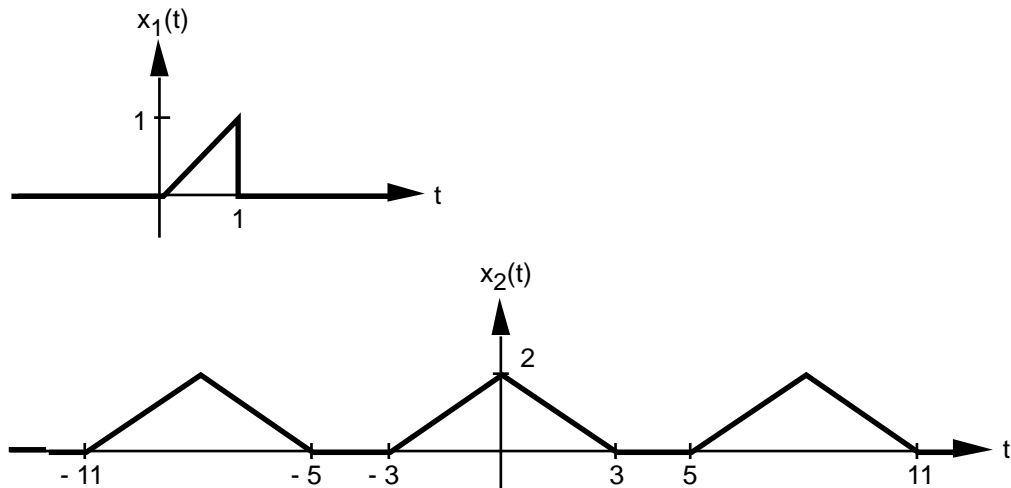
Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\)$ und $X_1(\)$ in Form einer Formel $X_2(\) = \dots$ an, mit welcher man $X_2(\)$ aus $X_1(\)$ bestimmen kann.

2. Gegeben seien die Grafen der beiden periodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie der Graf der aperiodischen Funktion $x_3(t)$:



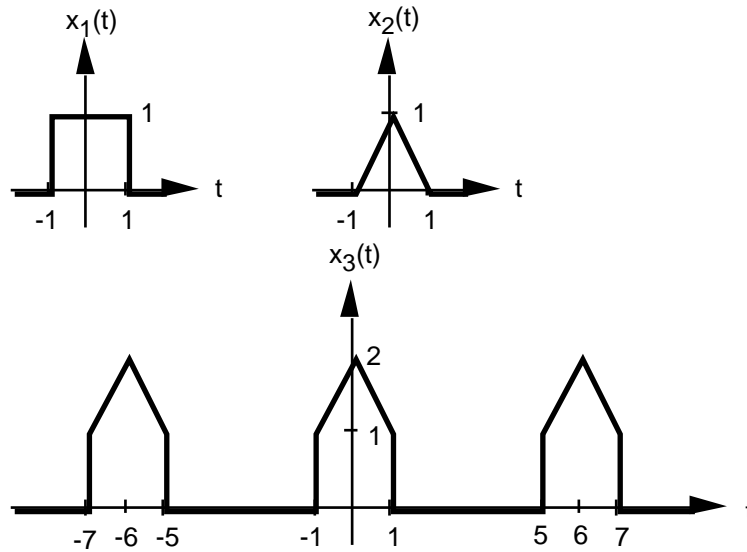
- a) Es sei angenommen, dass man die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ kennt.
 Drücken Sie die Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_1(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ aus.
 Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) und $X_3(\omega)$ in Form einer Formel $c_{1k} = \dots$ an, mit welcher man die Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) aus $X_3(\omega)$ bestimmen kann.
- b) Es sei nun angenommen, dass man alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_1(t)$ kennt.
 Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{2k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_2(t)$ durch die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_1(t)$ aus.
 Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Funktionen in Form einer Formel $c_{2k} = \dots$ an, mit welcher man die Koeffizienten c_{2k} ($k \in \mathbb{Z}$) aus den Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) bestimmen kann.

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:



- a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$ von Hand.
 Als Hilfsmittel sind nur eine Integrationstabelle erlaubt, jedoch keine Fourier-Transformations-Tabelle und kein Taschenrechner.
- b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $x_2(t)$ aus der Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$.
 Sie sollen also die Koeffizienten c_k weder von Grund auf berechnen noch eine Fourier-Reihen-Tabelle verwenden.
 Benützen Sie jedoch die Kenntnis von $X_1(\omega)$ sowie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.
 Betrachten Sie $X_1(\omega)$ als bekannt, auch wenn Sie in der Aufgabe a) kein Resultat erhalten haben sollten. Der explizite Ausdruck für $X_1(\omega)$ ist unwesentlich, da Sie lediglich den Zusammenhang zwischen $X_1(\omega)$ und den Koeffizienten c_k aufzeigen sollen.

4. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ sowie der periodischen Funktion $x_3(t)$:

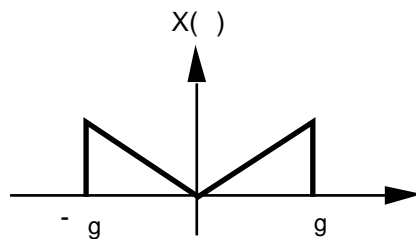


Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ aus.

Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für $X_3(\omega)$ berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen $X_3(\omega)$ und den beiden bekannten Transformierten $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ angeben.

5. Ein Modulator bildet das Produkt von zwei Zeitsignalen, dem Nachrichtensignal $x(t)$ und dem Trägersignal $s(t)$. Das Produkt $y(t) = x(t) \cdot s(t)$ ist das modulierte Signal.

Das Nachrichtensignal habe das folgende Spektrum:

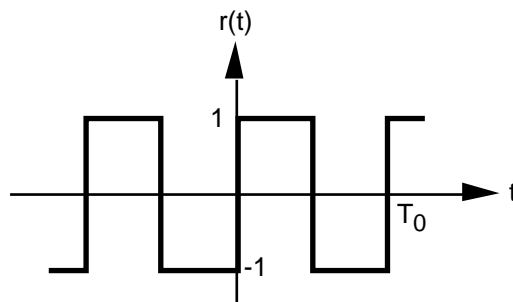


Skizzieren Sie das Fourierspektrum $Y(\omega)$ des modulierten Signals für die drei Fälle a), b) und c).

a) $s(t) = K \cos(\omega_0 t)$

b) $s(t) = K \sin(\omega_0 t)$

c) * $r(t)$



Annahme: Es gelte jeweils $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \gg \omega_g$

6. * Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1 < t < 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20 \cdot t) + 2 \cdot \cos(40 \cdot t)$$

Nun wird das Produkt $x(t) := x_1(t) \cdot x_2(t)$ gebildet.

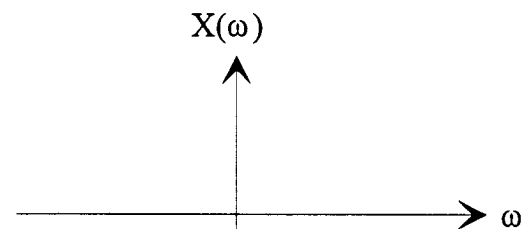
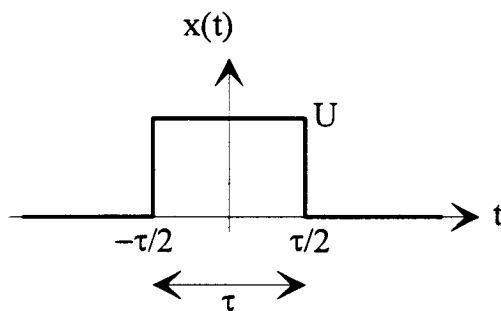
Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$, und zeichnen Sie den Grafen von $X(\omega)$.

Aus Ihrer grafischen Darstellung von $X(\omega)$ sollte man die Funktionsgleichung von $X(\omega)$ herauslesen können.

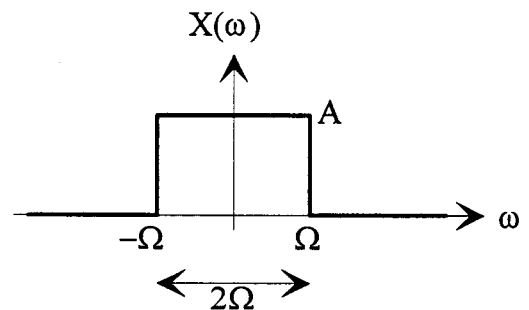
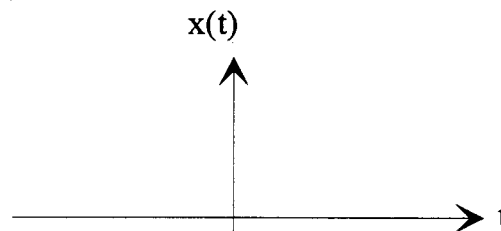
7. Gegeben ist entweder das Zeitsignal $x(t)$ oder dessen Spektrum $X(\omega)$.

Bestimmen Sie das Spektrum $X(\omega)$ (bei gegebenem $x(t)$) bzw. das Zeitsignal $x(t)$ (bei gegebenem Spektrum $X(\omega)$), und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $X(\omega)$ bzw. $x(t)$.

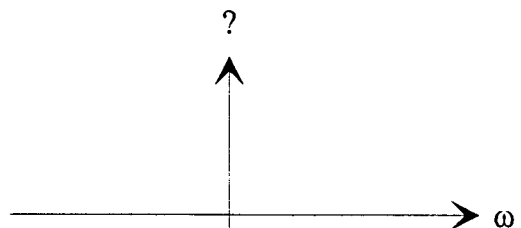
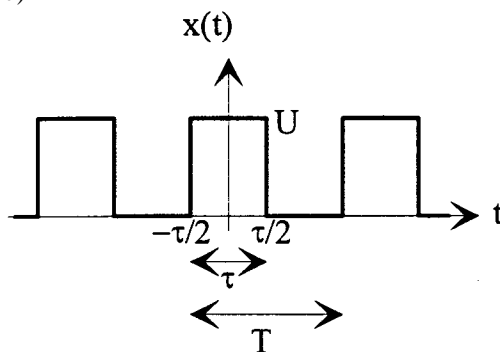
a)



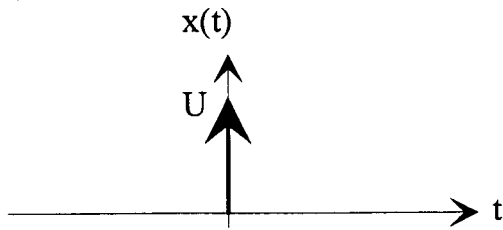
b)



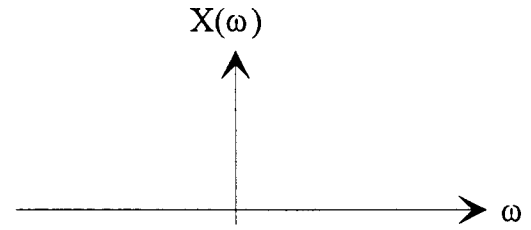
c)



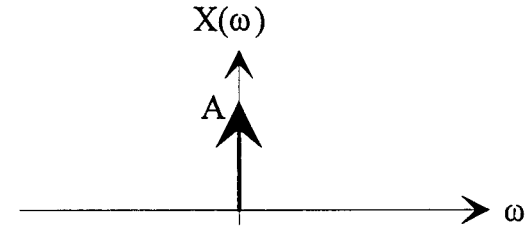
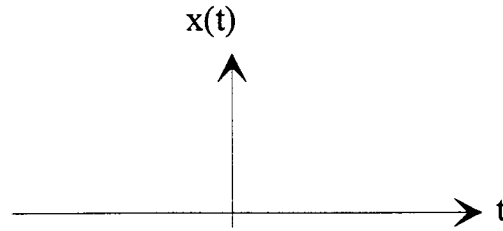
d)



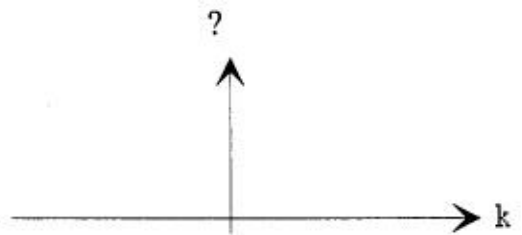
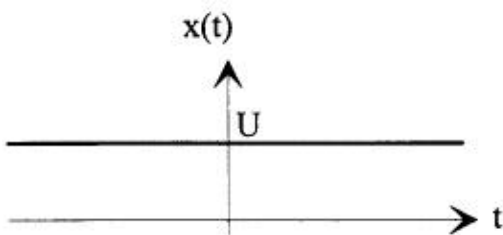
$$x(t) = U \cdot \delta(t)$$



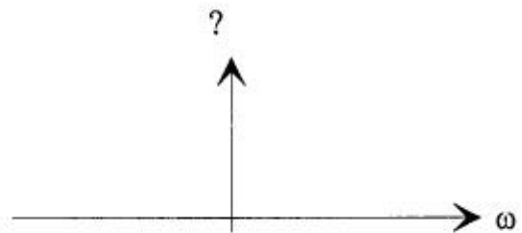
e)



f)

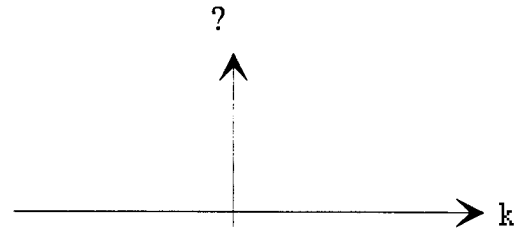
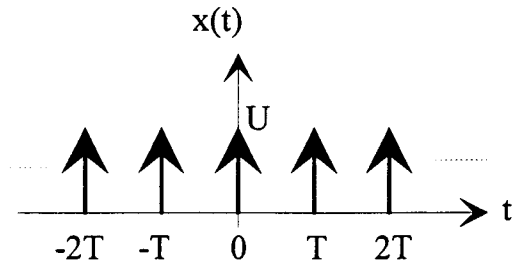


Darstellung als Fourierreihe

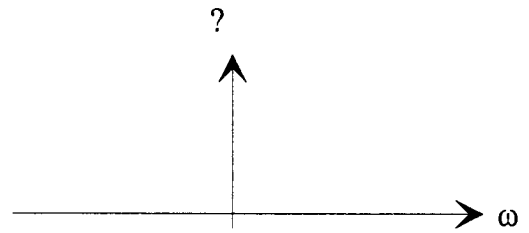


Darstellung als Fouriertransformierte

g)



Darstellung als Fourierreihe



Darstellung als Fouriertransformierte

Lösungen

1.
$$X_2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} e^{-jk(3/4)} X_1\left(k \frac{3}{4}\right) \left(\omega - k \frac{3}{2} \right)$$

2. a)
$$c_{1k} = \frac{1}{6} X_3\left(k \frac{3}{3}\right)$$
 b)
$$c_{2k} = \frac{3}{3} c_{10} + 2 \quad (k=0)$$

$$3 e^{-jk(2/3)} c_{1k} \quad (k \neq 0)$$

3. a)
$$X(\omega) = -\frac{1}{2} (e^{-j\omega} (-j\omega - 1) + 1) \quad (\omega \neq 0)$$

$$\frac{1}{2} \quad (\omega = 0)$$

b)
$$c_k = \frac{3}{4} e^{jk(3/4)} X_1\left(k \frac{3}{4}\right) + e^{-jk(3/4)} X_1\left(-k \frac{3}{4}\right)$$

4.
$$X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3} X_1\left(k \frac{3}{3}\right) + X_2\left(k \frac{3}{3}\right) \left(\omega - k \frac{3}{3} \right)$$

5. a)
$$Y(\omega) = \frac{K}{2} (X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0))$$
 b)
$$Y(\omega) = j \frac{K}{2} (X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0))$$

 c) * ...

6. *
$$X(\omega) = \text{sinc}(\omega + 20) + \text{sinc}(\omega - 20) + 2 \text{sinc}(\omega + 40) + 2 \text{sinc}(\omega - 40)$$

7. a)
$$X(\omega) = \frac{U \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}}{U} \quad (\omega \neq 0) = U \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$U \quad (\omega = 0)$$

b)
$$x(t) = \frac{\frac{A}{A} \frac{\sin(\omega t)}{t}}{\frac{A}{A}} \quad (t \neq 0) = \frac{A}{A} \text{sinc}(\omega t)$$

$$\frac{A}{A} \quad (t=0)$$

c)
$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} U \text{sinc} \frac{k \omega_0}{2} \left(\omega - k \omega_0 \right) \quad \omega_0 := \frac{2}{T}$$

d)
$$X(\omega) = U$$

e)
$$x(t) = \frac{A}{2}$$

f) Fourier-Reihe: $c_0 = U, c_k = 0 \quad (k \neq 0)$
 Fourier-Transformierte: $X(\omega) = 2 U \delta(\omega)$

g) Fourier-Reihe: $c_k = \frac{U}{T} \delta(k - Z)$

Fourier-Transformierte: $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} U \delta(\omega - k \omega_0) \quad \omega_0 := \frac{2}{T}$