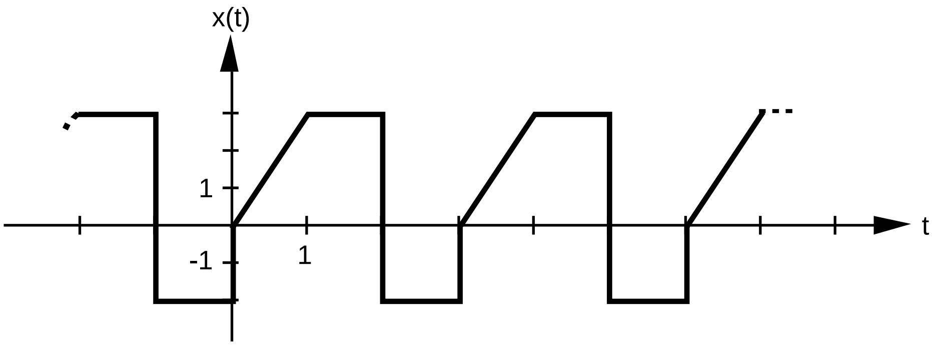
Übung 7 Reelle Fourier-Reihe
Konstanter Anteil, Spezielle Funktionen, Linearität, Skalierung

Lernziele

- aus dem Grafen einer einfacheren periodischen Funktion den konstanten Anteil der reellen Fourier-Reihe herauslesen können.
- angeben können, wie sich der konstante Anteil der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion ändert, wenn der Graf der Funktion vertikal verschoben wird.
- ohne Berechnung von Integralen Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion mit speziellen Symmetrieeigenschaften machen können.
- ohne Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion bestimmen können, die sich aus trigonometrischen Teilfunktionen zusammensetzt.
- die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion bestimmen können, die aus einer Linearkombination von Funktionen mit gleicher Grundperiode bestehen und deren reelle Fourier-Reihen bekannt sind.
- beurteilen können, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion verändern, wenn man die Funktion skaliert.

Aufgaben

1. Gegeben ist die periodische Funktion $x(t)$:



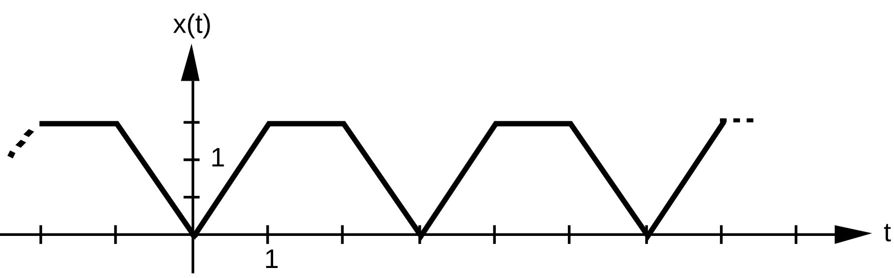
a) Bestimmen Sie den reellen Fourier-Koeffizienten a_0.

b) Der Graf von $x(t)$ werde um 3 Einheiten vertikal nach oben verschoben.
Wie gross ist der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion?

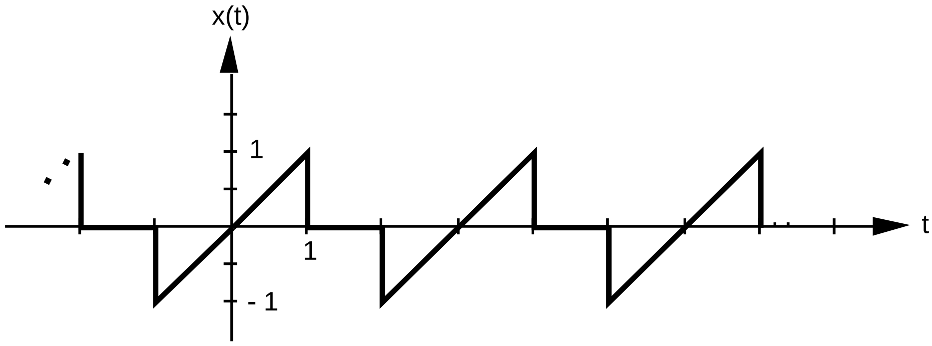
c) Um wieviele Einheiten müsste man den Grafen von $x(t)$ vertikal verschieben, damit der Koeffizient a_0 der geschobenen Funktion gleich Null würde?

2. Beurteilen Sie mit Begründung, jedoch ohne Berechnung von Integralen, welche der reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N) der periodischen Funktion $x(t)$ gleich Null sind:

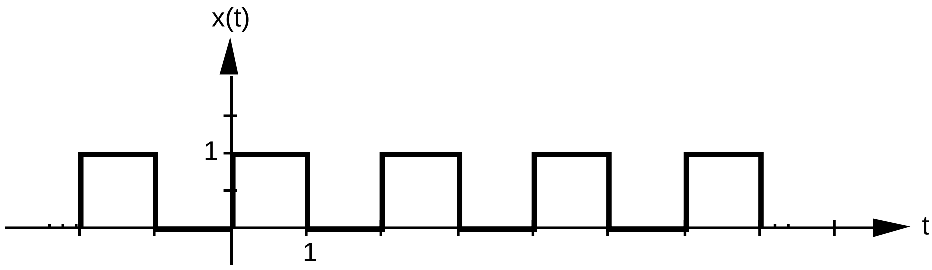
a)



b)



c)



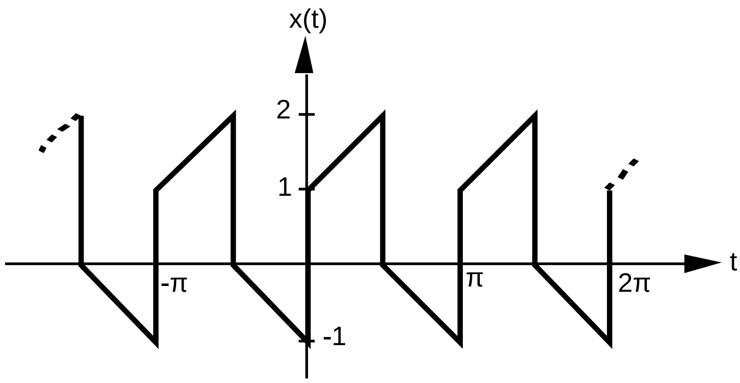
3. Bestimmen Sie ohne Tabellen und Berechnung von Integralen die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N) der Funktion x(t):

a) $x(t) = 2 + \cos(3t) - 4\cos(6t) + 2\sin(15t)$

b) $x(t) = \sin(4t) + 3\cos(10t) - 2\sin(12t) + \sin(24t)$

c) $x(t) = 2\sin(4t-1) - 4\cos(3t+2)$

4. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion x(t):

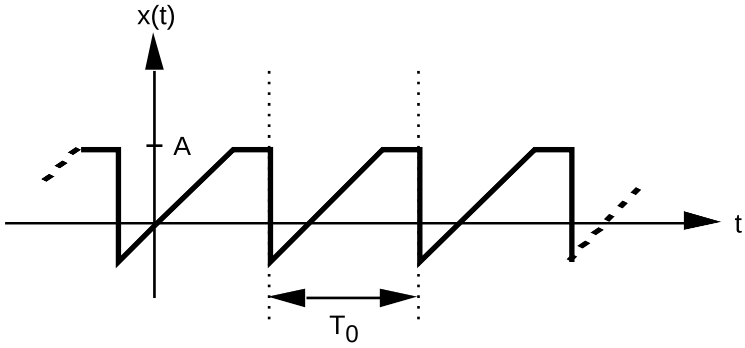


a) Die Funktion x(t) kann als Linearkombination zweier Teilfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ aufgefasst werden, deren reelle Fourier-Reihen in der Tabelle 2 des Lehrbuches Papula 2 (Seiten 173 und 174) aufgeführt sind.

Formulieren Sie diese Linearkombination, d.h. finden Sie heraus, aus welchen beiden Teilfunktionen x(t) zusammengesetzt ist und mit welchen Faktoren die beiden Teilfunktionen gewichtet sind.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von x(t) mit Hilfe der Linearität und den tabellierten reellen Fourier-Reihen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

5. Gegeben ist eine beliebige periodische Funktion $x(t)$:



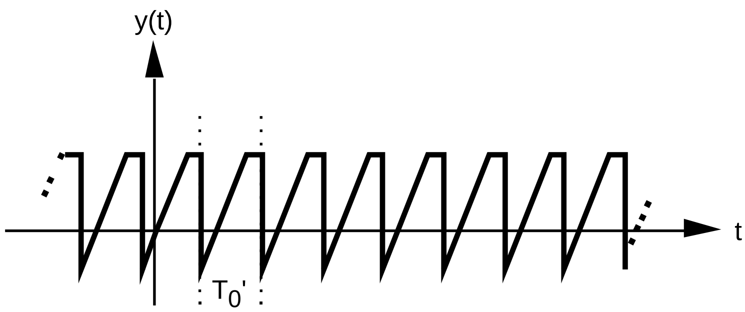
Die reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N) von $x(t)$ seien bekannt.

Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, inwiefern sich die reellen Fourier-Koeffizienten a_{0y}, a_{ky} (k N), b_{ky} (k N) der Funktion $y(t)$ von den Koeffizienten a_0, a_k (k N), b_k (k N) der Funktion $x(t)$ unterscheiden.

a)

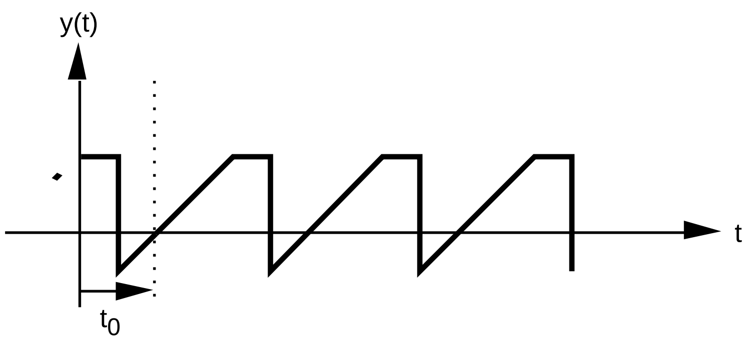
$y(t) := r\cdot x(t)$ mit $r>0$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ um den Faktor $r := A'/A$ skaliert,
d.h. der Graf ist in y-Richtung "gestreckt" (falls $r>1$) bzw. "gestaucht" (falls $r<1$).

b)



$y(t) := x(r\cdot t)$ mit $r>0$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um den Faktor $r = T_0/T_0'$ skaliert,
d.h. der Graf ist in der Zeit-Achse "gestaucht" (falls $r>1$) bzw. "gestreckt" (falls $r<1$).

c) *



$y(t) := x(t-t_0)$, d.h. $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ zeitlich um t_0 verschoben.

Lösungen

1. a) $a_0 = \frac{5}{3}$ b) $a_0 = \frac{23}{3}$ c) $\Delta y = -\frac{5}{6}$

2. a) $b_k = 0$ $(k \quad N)$ b) $a_0 = 0$, $a_k = 0$ $(k \quad N)$ c) $a_k = 0$ $(k \quad N)$

3. a) $\omega_0 = 3$ $$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k3t) + b_k \cdot \sin(k3t)\right)$$

$a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = -4$, $b_5 = 2$, alle anderen Koeffizienten = 0

b) $\omega_0 = 2$ $$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k2t) + b_k \cdot \sin(k2t)\right)$$

$a_0 = 0$, $b_2 = 1$, $a_5 = 3$, $b_6 = -2$, $b_{12} = 1$, alle anderen Koeffizienten = 0

c) $a_0 = 0$, $a_3 = -4\cos(2)$, $a_4 = -2\sin(1)$, $b_3 = 4\sin(2)$, $b_4 = 2\cos(1)$,
alle anderen Koeffizienten = 0

4. a) $x(t) = 2 \cdot x_1(t) - x_2(t)$

wobei: $x_1(t)$: (1) Rechteckskurve mit $\hat{y} := 1$ und $T_0 := \pi$ (Papula 2, Seite 173)
$x_2(t)$: (2) Dreieckskurve mit $\hat{y} := 1$ und $T_0 := \pi$ (Papula 2, Seite 173)

b)
$$\begin{aligned} x(t) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(6t) + \frac{1}{5}\sin(10t) + \ldots\right)\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(2t) + \frac{1}{9}\cos(6t) + \frac{1}{25}\cos(10t) + \ldots\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos(2t) - \frac{4}{9\pi^2}\cos(6t) - \frac{4}{25\pi^2}\cos(10t) - \ldots \\ &\quad + \frac{4}{\pi}\sin(2t) + \frac{4}{3\pi}\sin(6t) + \frac{4}{5\pi}\sin(10t) + \ldots \end{aligned}$$

5. a) Alle Koeffizienten sind um den Faktor r vergrössert (falls r>1) bzw. verkleinert (falls r<1):
$a_{0y} = r \cdot a_0$, $a_{ky} = r \cdot a_k$ $(k \quad N)$, $b_{ky} = r \cdot b_k$ $(k \quad N)$

b) Die Koeffizienten bleiben unverändert:
$a_{0y} = a_0$, $a_{ky} = a_k$ $(k \quad N)$, $b_{ky} = b_k$ $(k \quad N)$

c) * $a_{0y} = a_0$

k-te Harmonische

$a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$

$\downarrow$

$$\begin{aligned} & a_k \cdot \cos\left(k\omega_0(t-t_0)\right) + b_k \cdot \sin\left(k\omega_0(t-t_0)\right) \\ &= a_k\left(\cos(k\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t_0) + \sin(k\omega_0 t)\cdot\sin(k\omega_0 t_0)\right) \\ &\quad + b_k\left(\sin(k\omega_0 t)\cdot\cos(k\omega_0 t_0) - \cos(k\omega_0 t)\cdot\sin(k\omega_0 t_0)\right) \\ &= \ldots \\ &= \left(a_k\cdot\cos(k\omega_0 t_0) - b_k\cdot\sin(k\omega_0 t_0)\right)\cos(k\omega_0 t) + \left(a_k\cdot\sin(k\omega_0 t_0) + b_k\cdot\cos(k\omega_0 t_0)\right)\sin(k\omega_0 t) \end{aligned}$$

Es folgt also:

$a_{ky} = a_k\cdot\cos(k\omega_0 t_0) - b_k\cdot\sin(k\omega_0 t_0)$

$b_{ky} = a_k\cdot\sin(k\omega_0 t_0) + b_k\cdot\cos(k\omega_0 t_0)$