

Übung 4 Fourier-Reihen Trigonometrische Basisfunktionen, Periodizität, Linearität, Integrale

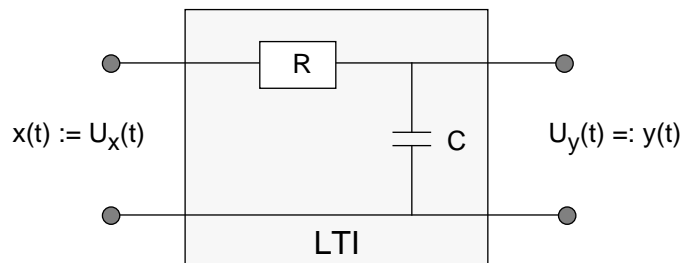
Lernziele

- verstehen, warum es sinnvoll ist, eine Funktion als Linearkombination von geeigneten Basisfunktionen darzustellen.
- verstehen, warum es sinnvoll ist, ein periodisches Signal, welches durch ein lineares, zeitinvariantes System läuft, als Linearkombination von sinusförmigen Basissignalen darzustellen.
- die Grundperiode einer Sinus- bzw. Cosinus-Funktion kennen.
- verstehen, dass die Grundfrequenz der in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion auftretenden Basisfunktionen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz der periodischen Funktion sind.
- einfachere Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle lösen können.

Aufgaben

1. Trigonometrische Basisfunktionen

Im Unterrichtszimmer ist die folgende RC-Schaltung aufgebaut ($R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$):



Die Schaltung bildet ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System).

Die an der Schaltung angelegte Spannung $U_x(t)$ entspricht dem Eingangssignal $x(t)$.

Die Spannung $U_y(t)$ über dem Kondensator entspricht dem Ausgangssignal $y(t)$.

Ein Funktions-Generator liefert das Eingangssignal $x(t)$. Der zeitliche Verlauf des Eingangssignals $x(t)$ und des Ausgangssignals $y(t)$ können auf einem Kathodenstrahl-Oszillografen (KO) betrachtet werden.

Die Werte von R und C sind gegeben durch $R = 1 \text{ k}\Omega$ und $C = 100 \text{ nF}$.

- Stellen Sie am Funktions-Generator ein **sinusförmiges** Signal mit der Amplitude 0.5 V (1 V peak-to-peak) und der Frequenz 1 kHz ein.
Stellen Sie am KO fest:
 - Das Ausgangssignal ist ebenfalls ein **sinusförmiges** Signal
 - Die **Frequenz** ist gleich wie beim Eingangssignal. Lediglich **Amplitude** und **Phase** haben sich verändert.
- Variieren Sie am Funktions-Generator die Frequenz des Eingangssignals.
Stellen Sie am KO fest:
 - Das Ausgangssignal hat immer die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal.
 - Die Amplitude und die Phase des Ausgangssignals hängen von der Frequenz ab.Begründen sie, dass es sich beim betrachteten System um ein Tiefpassfilter handelt.
- Stellen Sie nun am Funktions-Generator ein **Dreieckssignal** ein.
Stellen Sie am KO fest:
 - Das Ausgangssignal ist **kein Dreieckssignal** mehr.

2. Periodizität

- Bestimmen Sie die Grundperiode T_0 der folgenden Funktionen:
 - $x(t) = \sin(t)$
 - $x(t) = \sin(2t)$

- iii) $x(t) = \sin(3t)$
iv) $x(t) = \sin(at)$ ($a \in \mathbb{R}^+$)
- b) $x(t)$ sei eine periodische Funktion mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2}{T_0}$.
Überprüfen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a), dass die folgenden beiden Aussagen richtig sind:
- i) Die Grundfrequenz der Funktion $x_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ ist gleich gross wie die Grundfrequenz von $x(t)$.
ii) Die Grundfrequenz der Funktion $x_k(t) = \sin(k \omega_0 t)$ ist k -mal so gross wie die Grundfrequenz von $x(t)$.
- c) Überlegen Sie sich, dass die Ergebnisse aus a) und b) sinngemäss auch für die entsprechenden Cosinus-Funktionen gelten.

3. Linearität

In dieser Aufgabe soll die folgende Analogie aufgezeigt werden:

Ein Signal $x(t)$ durchläuft ein lineares System.

Ein Vektor x wird einer linearen Abbildung (hier: Drehung) unterzogen.

Gegeben sei der folgende Vektor x im dreidimensionalen Raum:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor x soll um 90° um die z -Achse gedreht werden.

Gesucht ist der zu x gehörige Bildvektor y .

- a) Finden Sie eine Methode, um den Bildvektor y möglichst einfach zu bestimmen. Die Methode soll eine Zerlegung von x in möglichst günstige Basisvektoren beinhalten. Beschreiben Sie das Vorgehen in ein paar Stichworten.
b) Erklären Sie, worin die in der Einleitung dieser Aufgabe erwähnte Analogie besteht.

4. Integrale

In der Herleitung der Formeln zur Berechnung der reellen Fourier-Koeffizienten von periodischen Funktionen treten die nachstehenden Integrale auf.

Bestimmen Sie die Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.

Es gilt jeweils $\omega_0 := \frac{2}{T_0}$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig, $m \in \mathbb{N}$ beliebig

- a) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) dt$
b) $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) dt$
c) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \sin(m \omega_0 t) dt$
d) $\int_0^{T_0} \cos(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$
e) $\int_0^{T_0} \sin(k \omega_0 t) \cdot \cos(m \omega_0 t) dt$

Lösungen

1. ...

2. a) i) $T_0 = 2$
 ii) $T_0 = \frac{2}{2} =$
 iii) $T_0 = \frac{2}{3}$
 iv) $T_0 = \frac{2}{a}$

b) ...

c) ...

3. a) - x darstellen als Linearkombination der Basisvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 e_1 + 4 e_2 + 5 e_3$$

- Drehung auf die einzelnen Basisvektoren anwenden:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & -e_1 \\ e_3 & e_3 \end{pmatrix}$$

- Bildvektor als Linearkombination der Bildvektoren der Basisvektoren zusammensetzen:

$$y = 2 e_2 + 4 (-e_1) + 5 e_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Analogie in tabellarischer Darstellung:

Signal $x(t)$	Vektor x
Das Signal $x(t)$ durchläuft ein lineares System.	Der Vektor x wird einer linearen Abbildung unterworfen.
Basis-signale $1(t)$, $2(t)$, $3(t)$, ...	Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3
Das Signal $x(t)$ wird dargestellt als Linearkombination der Basissignale $1(t)$, $2(t)$, $3(t)$, ...	Der Vektor wird dargestellt als Linearkombination der Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3
Die Basissignale $1(t)$, $2(t)$, $3(t)$, ... verhalten sich bezüglich des betrachteten Systems sehr einfach.	Die Basisvektoren e_1 , e_2 , e_3 verhalten sich gegenüber der betrachteten Abbildung sehr einfach.
Das Ausgangssignal $y(t)$ setzt sich zusammen als Linearkombination der Ausgangssignale der einzelnen Basissignale.	Der Bildvektor y setzt sich zusammen als Linearkombination der Bildvektoren der einzelnen Basisvektoren.

4. a) $\int_0^{T_0} \sin(k \cdot \omega t) dt = 0$

b) $\int_0^{T_0} \cos(k \cdot \omega t) dt = 0$

c) $\int_0^{T_0} \sin(k \cdot \omega t) \cdot \sin(m \cdot \omega t) dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \frac{T_0}{2} & (k=m) \end{cases}$

d) $\int_0^{T_0} \cos(k \cdot \omega t) \cdot \cos(m \cdot \omega t) dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \frac{T_0}{2} & (k=m) \end{cases}$

e) $\int_0^{T_0} \sin(k \cdot \omega t) \cdot \cos(m \cdot \omega t) dt = 0$

Integraltabelle

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C \quad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \cos(ax) \cos(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C \quad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C \quad (|a| \neq |b|)$$

$$\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a} + C \quad (a \neq 0)$$