

## Übung 2                      Laplace-Transformation   Linearität, Faltung

### Lernziele

- eine Laplace-Transformations-Tabelle zur Bestimmung einer Laplace-Transformierten anwenden können.
- die Linearitäts-Eigenschaft der Laplace-Transformation zur Bestimmung einer Laplace-Transformierten anwenden können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.
- sich das Faltungsintegral zweier Funktionen grafisch vorstellen können.
- die Faltung zweier einfacher Funktionen sowohl grafisch als auch analytisch ausführen können.

### Aufgaben

#### Linearität

1. Papula: 685/1

#### Faltung

2. Veranschaulichen Sie sich das Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

anhand der beiden konkreten Funktionen

$$x_1(t) = e^{-at} \cdot u(t) \quad (a > 0)$$

$$x_2(t) = u(t)$$

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- a) Fassen Sie die folgenden Ausdrücke als Funktionen der Variablen  $t$  auf, und skizzieren Sie deren Grafen:

- i)  $x_1(t)$

- ii)  $x_2(t)$

- iii)  $x_2(-t)$

- iv)  $x_2(t-1)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $t > 0$  und  $t < 0$ .

- v)  $x_1(t) \cdot x_2(t-1)$

Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle  $t > 0$  und  $t < 0$ .

- b) Finden Sie mit Hilfe der Grafen aus a) eine geometrische Deutung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

- c) Überlegen Sie sich allgemein, dass für beliebige rechtsseitige Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  ( $x_1(t) = x_2(t) = 0$  für  $t < 0$ ) gilt:

$$x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

3. Die Funktion  $y(t)$  sei definiert als Faltung der beiden Funktionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ :

$$y(t) := x_1(t) * x_2(t)$$

- i) Skizzieren Sie die Grafen von  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$ .
- ii) Bestimmen Sie  $y(t)$  auf grafische Weise (wie in der Aufgabe 2).
- iii) Skizzieren Sie den Grafen von  $y(t)$ .

a)  $x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 1) \end{cases}$

b)  $x_1(t) = t$   
 $x_2(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 1) \end{cases}$

c) \*  $x_1(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ -t+2 & (1 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 2) \end{cases}$   
 $x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t \leq 2) \\ 0 & (t < 0 \text{ oder } t > 2) \end{cases}$

4. Papula: 687/11

Hinweis:

Bestimmen Sie die Faltungsprodukte nicht grafisch (wie in der Aufgabe 3), sondern indem Sie die Faltungsintegrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle berechnen.

5. Studieren Sie das Java-Applet "Faltung", welches das Faltungsintegral zweier Funktionen veranschaulicht. Sie finden einen Link auf das Applet unter:

<http://telecom.tlab.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...) Faltung

**Lösungen**

1. siehe Papula

2. a) ...

b)  $x_1(\cdot) \cdot x_2(t-\cdot)$  d

ist die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion  $x_1(\cdot) \cdot x_2(t-\cdot)$  und der  $t$ -Achse.

3. a) i) ...

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0 \quad t > 2) \\ t & (0 \leq t < 1) \\ -t+2 & (1 \leq t < 2) \end{cases}$$

iii) ...

b) i) ...

$$y(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{t^2}{2} & (0 \leq t < 1) \\ \frac{1}{2} & (t > 1) \end{cases}$$

iii) ...

c) \* i) ...

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \leq t < 1) \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 & (1 \leq t < 3) \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8 & (3 \leq t < 4) \\ 0 & (t < 0 \quad t > 4) \end{cases}$$

iii) ...

4. siehe Papula

5. ...