

Übung 1 Laplace-Transformation Bestimmung der Laplace-Transformierten, Konvergenzbereich

Lernziele

- eine neue Problemstellung bearbeiten können.
- die (einseitige) Laplace-Transformierte einer einfacheren linksseitigen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- verstehen, dass der Konvergenzbereich ein Bestandteil einer Laplace-Transformierten ist.
- den zu einer Laplace-Transformierten gehörigen Konvergenzbereich bestimmen können.

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = e^{-at} \cdot (t) \quad (a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \quad \text{mit} \quad (t) := \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \quad \text{Heaviside-Funktion}$$

- Skizzieren Sie den Grafen von $x(t)$ für die drei Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$.
- Bestimmen die Laplace-Transformierte $X(s)$ von $x(t)$.
Gehen Sie dabei von der Definitionsgleichung der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das uneigentliche Integral von Hand.

2. Papula: 683/1 (ohne Teilaufgabe d)), 684/3

- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $F(s)$ (gemäss Aufgabenstellung Papula).
- Geben Sie den Konvergenzbereich K der Laplace-Transformierten $F(s)$ an.

Hinweis:

- Für alle Funktionen f gilt jeweils: $f(t) = 0$ für $t < 0$.

Lösungen

1. a) ...

b) $X(s) = \frac{1}{s+a} \quad (\text{Re}(s) > -a)$

$X(s)$ nicht definiert $(\text{Re}(s) = -a)$

Konvergenzbereich $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -a\}$

2. i) 683/1 siehe Papula

684/3 a) $F(s) = \begin{cases} \dots \text{ (siehe Papula)} & (s < 0) \\ 0 & (s = 0) \\ \dots \text{ (siehe Papula)} & (s > 0) \end{cases}$

b) $F(s) = j \frac{aA}{2} \quad (s = -j \frac{a}{2})$

$-j \frac{aA}{2} \quad (s = j \frac{a}{2})$

c) siehe Papula

ii) 683/1 a) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$

b) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > -4\}$

c) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > - \}$

d) * $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > a\}$

e) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$

f) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$

684/3 a) $K = \mathbb{C}$

b) $K = \mathbb{C}$

c) $K = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$