Parseval'sche Beziehung

$x(t)$ periodisch mit Grundperiode T_0 bzw. Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

Komplexe Fourier-Reihe

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

Parseval'sche Beziehung

$$\boxed{\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2 \, dt &= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \big(x(t)\big)^* \, dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t} \right)^* dt \\
&= \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \, e^{-jk\omega_0 t} \right) dt \\
&= \int_{(T_0)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} c_k^* \, x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \right) dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{(T_0)} \frac{1}{T_0} c_k^* \, x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left(\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt \right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \, c_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2
\end{aligned}$$

Physikalische Interpretation:	$x(t)$	=	"Signal", Elektrische Stromstärke I_Q, Elektrische Spannung U
	$\lvert x(t)\rvert^2$		Leistung zum Zeitpunkt t, wenn das Signal ein Widerstandselement durchläuft $\left(P_{el} = U \cdot I_Q = R \cdot I_Q^2 = \frac{1}{R} U^2\right)$
	$\lvert x(t)\rvert^2\, dt$		Umgesetzte Energie im Zeitintervall [t,t+dt]
	$\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} \lvert x(t)\rvert^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert c_k\rvert^2$		**Mittlere Leistung**
	$\lvert c_k\rvert^2$		Mittlere Leistung bezüglich der k-ten Fourier-Komponente des Signals