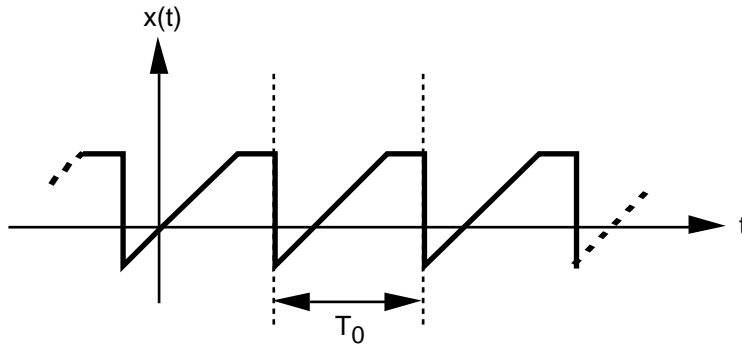


Reelle Fourier-Reihe

Definition

Periodische Funktion bzw. periodisches Signal $x(t)$ mit Grundperiode T_0



Die trigonometrische Reihe in der Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \quad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$$

ist die **reelle Fourier-Reihe** von $x(t)$.

Die Konstanten a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) sind die **reellen Fourier-Koeffizienten**.

Die Fourier-Reihen-Darstellung erlaubt es, $x(t)$ in einen konstanten Anteil, in eine Grundschwingung und in Oberschwingungen aufzuteilen:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} \quad \text{Konstanter Anteil}$$

$+ a_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0 t)$	1. Harmonische, Grundschwingung
$+ a_2 \cdot \cos(2 \omega_0 t) + b_2 \cdot \sin(2 \omega_0 t)$	2. Harmonische, 1. Oberschwingung
$+ a_3 \cdot \cos(3 \omega_0 t) + b_3 \cdot \sin(3 \omega_0 t)$	3. Harmonische, 2. Oberschwingung
$+ \dots$	
$+ a_n \cdot \cos(n \omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n \omega_0 t)$	n. Harmonische, (n-1). Oberschwingung
$+ \dots$	

Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \right) dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{a_0}{2} \cdot t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \sin(k \omega_0 t) - \frac{b_k}{k \omega_0} \cos(k \omega_0 t) \right) \right] \Big|_0^{T_0}$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \sin(k \omega_0 T_0) - \frac{b_k}{k \omega_0} \cos(k \omega_0 T_0) \right) - \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \sin(k \omega_0 \cdot 0) - \frac{b_k}{k \omega_0} \cos(k \omega_0 \cdot 0) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \sin(k \cdot 2\pi) - \frac{b_k}{k \omega_0} \cos(k \cdot 2\pi) \right) - \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \sin(0) - \frac{b_k}{k \omega_0} \cos(0) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \cdot 0 - \frac{b_k}{k \omega_0} \cdot 1 \right) - \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \cdot 0 - \frac{b_k}{k \omega_0} \cdot 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \cdot 0 - \frac{b_k}{k \omega_0} \cdot 1 + \frac{b_k}{k \omega_0} \cdot 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{a_0}{2} \cdot T_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k \omega_0} \cdot 0 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{a_0}{2} \cdot T_0 \right] = \frac{a_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

$$a_k \ (k \in \mathbb{N}) \quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \omega t) + b_k \cdot \sin(k \omega t)) \quad \left| \cdot \cos(m \omega t), m \in \mathbb{N} \right| \int_0^{T_0} \dots dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(m \omega t) dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \omega t) + b_k \cdot \sin(k \omega t)) \right) \cdot \cos(m \omega t) dt$$

$$= \dots$$

$$= a_m \cdot \frac{T_0}{2} \quad \left| : \frac{T_0}{2} \right.$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \cos(k \omega t) dt$$

$$b_k \ (k \in \mathbb{N}) \quad x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \omega t) + b_k \cdot \sin(k \omega t)) \quad \left| \cdot \sin(m \omega t), m \in \mathbb{N} \right| \int_0^{T_0} \dots dt$$

$$\int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(m \omega t) dt = \int_0^{T_0} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \omega t) + b_k \cdot \sin(k \omega t)) \right) \cdot \sin(m \omega t) dt$$

$$= \dots$$

$$= b_m \cdot \frac{T_0}{2} \quad \left| : \frac{T_0}{2} \right.$$

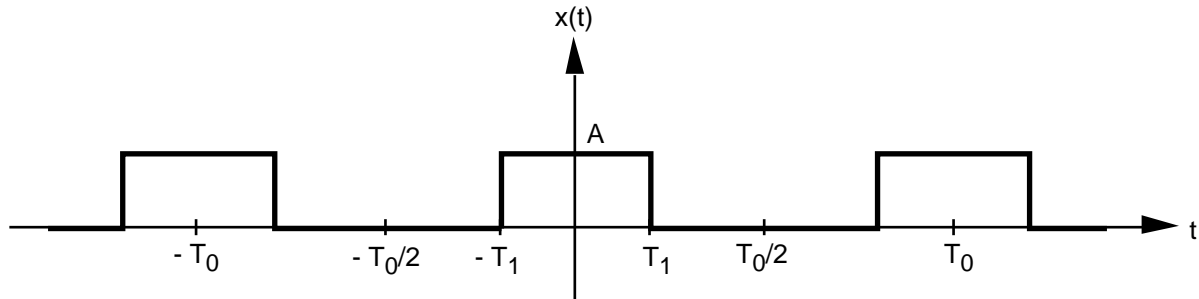
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cdot \sin(k \omega t) dt$$

Da die Integranden in den Integralen für a_0 , a_k ($k \in \mathbb{N}$), b_k ($k \in \mathbb{N}$) die Periode T_0 besitzen, kann über ein beliebiges Intervall der Länge T_0 integriert werden:

$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt$ $a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k \omega t) dt$ $b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k \omega t) dt$
--

Beispiel

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$$



$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt = \dots = \frac{4AT_1}{T_0}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k \omega_0 t) dt = \dots = \frac{2A \cdot \sin(k \omega_0 T_1)}{k}$$

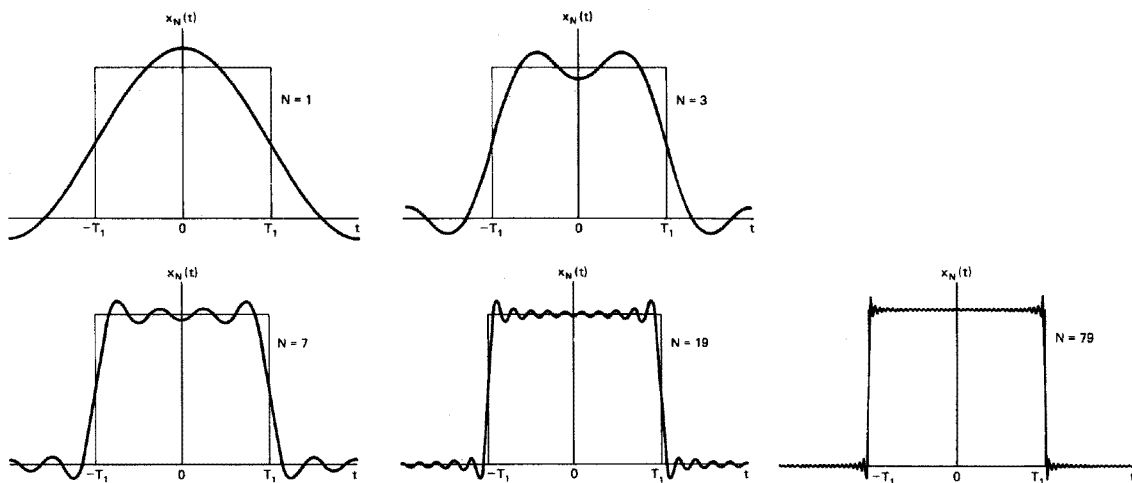
$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k \omega_0 t) dt = \dots = 0$$

$$x(t) = \frac{2AT_1}{T_0} + \frac{2A \cdot \sin(\omega_0 T_1)}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(2 \omega_0 T_1)}{2} \cos(2 \omega_0 t) + \frac{2A \cdot \sin(3 \omega_0 T_1)}{3} \cos(3 \omega_0 t) + \dots$$

Endliche Fourier-Reihe als Näherungsfunktion

$$x_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cdot \cos(k \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \omega_0 t))$$

x(t) wie im obigen Beispiel



Betrags-/Phasen-Darstellung

Die reelle Fourier-Reihe kann sowohl in der Sinus-/Cosinus- als auch in der Betrags-/Phasen-Darstellung geschrieben werden:

Sinus-/Cosinus-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)) \quad (a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

Betrags-/Phasen-Darstellung

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t + \varphi_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, A_k \geq 0, \varphi_k \in]-\pi, \pi[)$$

oder

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t + \psi_k) \quad (a_0 \in \mathbb{R}, B_k \geq 0, \psi_k \in]-\pi, \pi[)$$

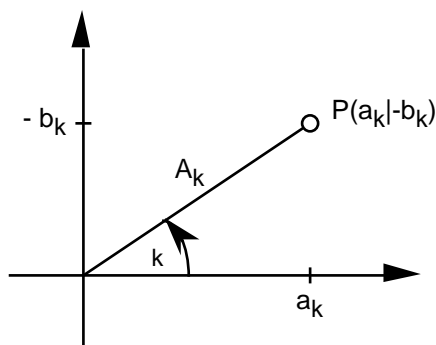
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten A_k und φ_k können a_k und $-b_k$ als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t) = A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t + \varphi_k)$$

...

$$a_k = A_k \cdot \cos(\varphi_k)$$

$$b_k = -A_k \cdot \sin(\varphi_k)$$



$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$	
$\varphi_k =$	$-\arctan \frac{b_k}{a_k} \quad (a_k > 0)$
$\varphi_k =$	$-\frac{\pi}{2} \quad (a_k = 0, b_k > 0)$
$\varphi_k =$	$\frac{\pi}{2} \quad (a_k = 0, b_k < 0)$
$\varphi_k =$	$-\arctan \frac{b_k}{a_k} + \pi \quad (a_k < 0)$

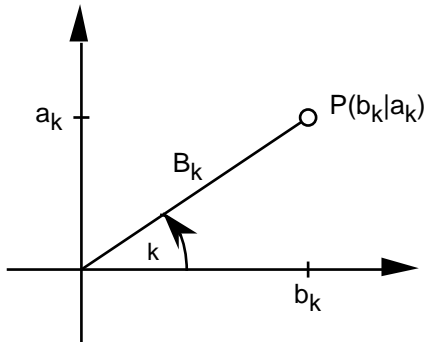
Für die Umrechnung der Koeffizienten a_k und b_k in die Koeffizienten B_k und φ_k können b_k und a_k als kartesische Koordinaten eines Punktes P aufgefasst werden:

$$a_k \cdot \cos(k \cdot \varphi_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \varphi_0 t) = B_k \cdot \sin(k \cdot \varphi_0 t + \varphi_k)$$

...

$$a_k = B_k \cdot \sin(\varphi_k)$$

$$b_k = B_k \cdot \cos(\varphi_k)$$



$$B_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \quad (b_k > 0)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} \quad (b_k = 0, a_k > 0)$$

$$\varphi_k = -\frac{\pi}{2} \quad (b_k = 0, a_k < 0)$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} + \pi \quad (b_k < 0)$$