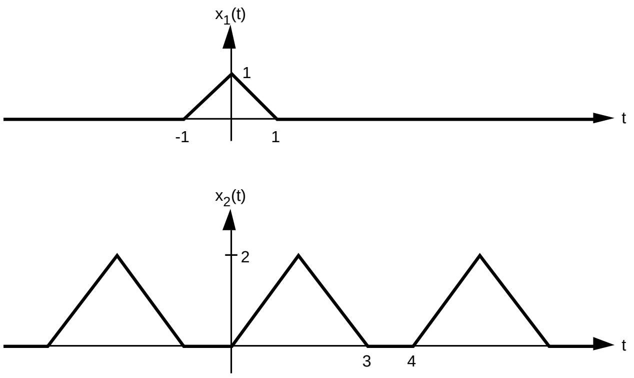
Repetitions-Übung 2 Fourier-Transformation, Laplace-Transformation

Aufgaben

1. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:

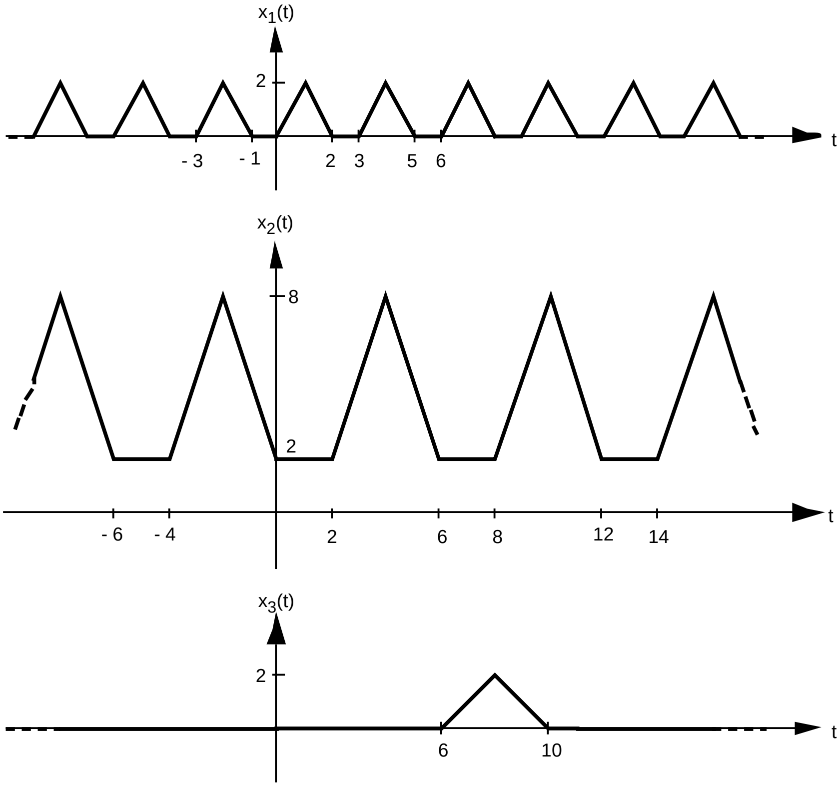


Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\omega)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\omega)$ und $X_1(\omega)$ in Form einer Formel $X_2(\omega) = ...$ an, mit welcher man $X_2(\omega)$ aus $X_1(\omega)$ bestimmen kann.

2. Gegeben seien die Grafen der beiden periodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie der Graf der aperiodischen Funktion $x_3(t)$:



a) Es sei angenommen, dass man die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ kennt.

Drücken Sie die Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \; Z$) der Funktion $x_1(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ aus.

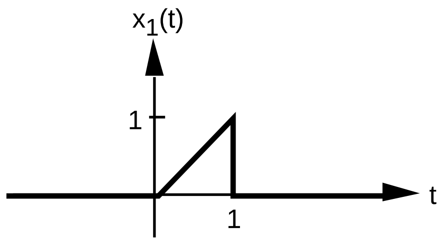
Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_{1k} ($k \; Z$) und $X_3(\omega)$ in Form einer Formel c_{1k} = ... an, mit welcher man die Koeffizienten c_{1k} ($k \; Z$) aus $X_3(\omega)$ bestimmen kann.

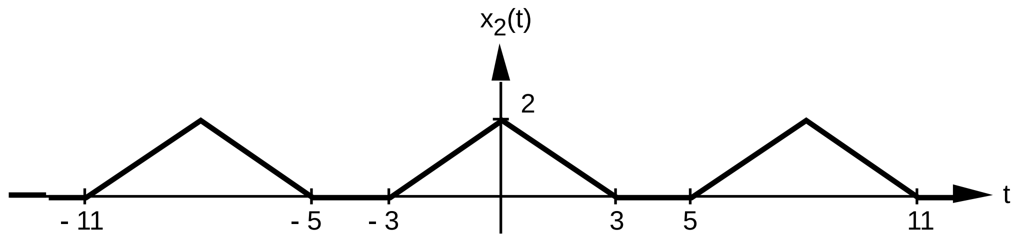
b) Es sei nun angenommen, dass man alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \; Z$) der Funktion $x_1(t)$ kennt.

Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{2k} ($k \; Z$) der Funktion $x_2(t)$ durch die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \; Z$) der Funktion $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Funktionen in Form einer Formel c_{2k} = ... an, mit welcher man die Koeffizienten c_{2k} ($k \; Z$) aus den Koeffizienten c_{1k} ($k \; Z$) bestimmen kann.

3. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:





a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$ von Hand.

Als Hilfsmittel sind nur eine Integrationstabelle erlaubt, jedoch keine Fourier-Transformations-Tabelle und kein Taschenrechner.

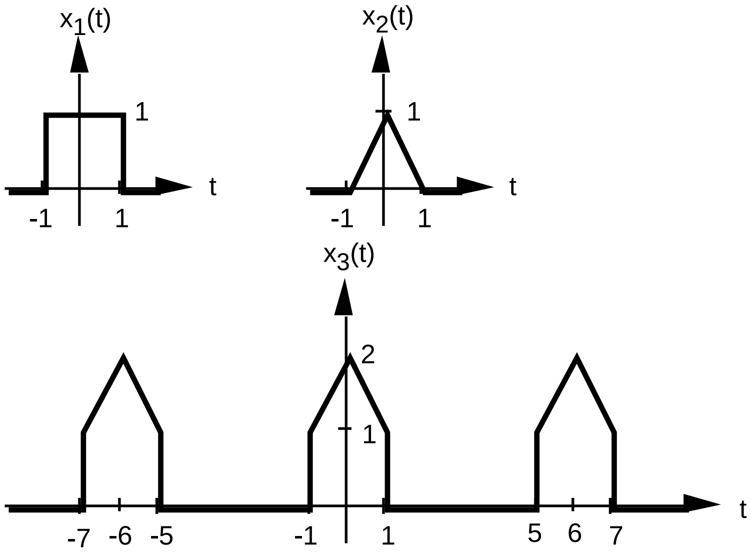
b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $x_2(t)$ aus der Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$.

Sie sollen also die Koeffizienten c_k weder von Grund auf berechnen noch eine Fourier-Reihen-Tabelle verwenden.

Benützen Sie jedoch die Kenntnis von $X_1(\omega)$ sowie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Betrachten Sie $X_1(\omega)$ als bekannt, auch wenn Sie in der Augabe a) kein Resultat erhalten haben sollten. Der explizite Ausdruck für $X_1(\omega)$ ist unwesentlich, da Sie lediglich den Zusammenhang zwischen $X_1(\omega)$ und den Koeffizienten c_k aufzeigen sollen.

4. Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$ sowie der periodischen Funktion $x_3(t)$:



Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ durch die als bekannt vorausgesetzten Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ aus.
Sie sollen also nicht den konkreten Ausdruck für $X_3(\omega)$ berechnen, sondern den Zusammenhang zwischen $X_3(\omega)$ und den beiden bekannten Transformierten $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$ angeben.

5. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & (-1<T<1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

$$x_2(t) = \cos(20\cdot t) + 2\cdot\cos(40\cdot t)$$

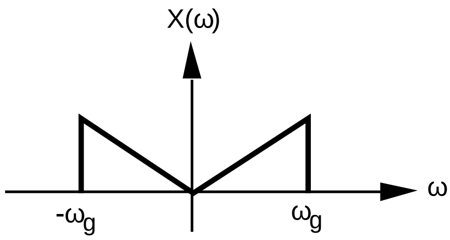
Nun wird das Produkt $x(t) := x_1(t)\cdot x_2(t)$ gebildet.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ von $x(t)$, und zeichnen Sie den Grafen von $X(\omega)$.

Aus Ihrer grafischen Darstellung von $X(\omega)$ sollte man die Funktionsgleichung von $X(\omega)$ herauslesen können.

6. Ein Modulator bildet das Produkt von zwei Zeitsignalen, dem Nachrichtensignal $x(t)$ und dem Trägersignal $s(t)$. Das Produkt $y(t) = x(t)\cdot s(t)$ ist das modulierte Signal.

Das Nachrichtensignal habe das folgende Spektrum:

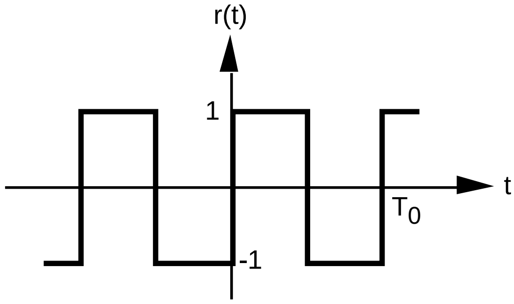


Skizzieren Sie das Fourierspektrum $Y(\omega)$ des modulierten Signals für die drei Fälle a), b) und c).

a) $s(t) = K\cos(\omega_0 t)$

b) $s(t) = K\sin(\omega_0 t)$

c) r(t)

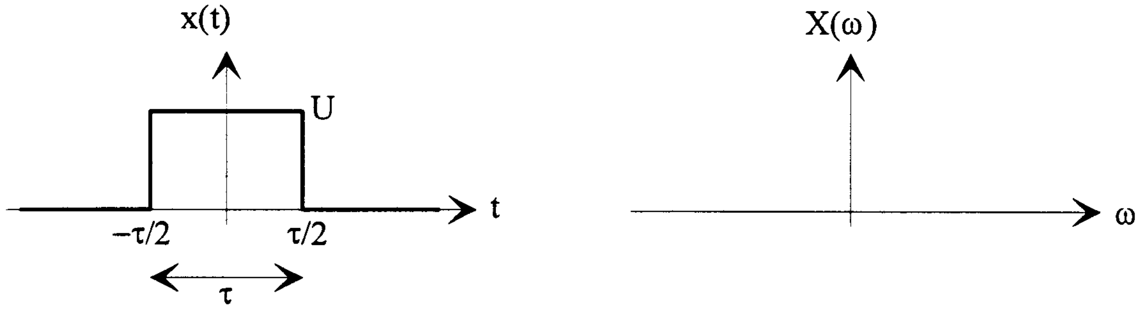


Annahme: Es gelte jeweils $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} >> \omega_g$

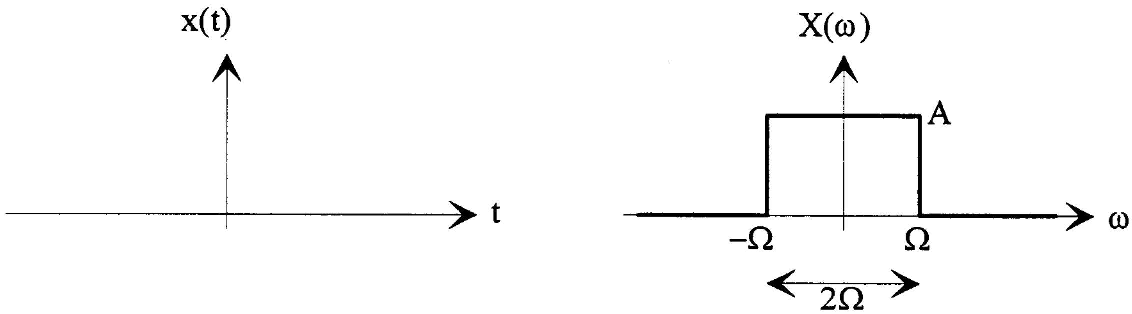
7. Gegeben ist entweder das Zeitsignal x(t) oder dessen Spektrum X(ω).

Bestimmen Sie das Spektrum X(ω) (bei gegebenem x(t)) bzw. das Zeitsignal x(t) (bei gegebenem Spektrum X(ω)), und skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von X(ω) bzw. x(t).

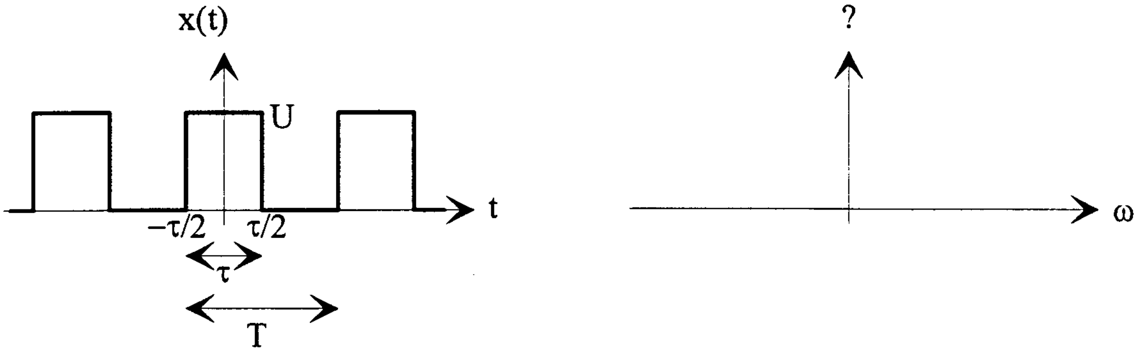
a)



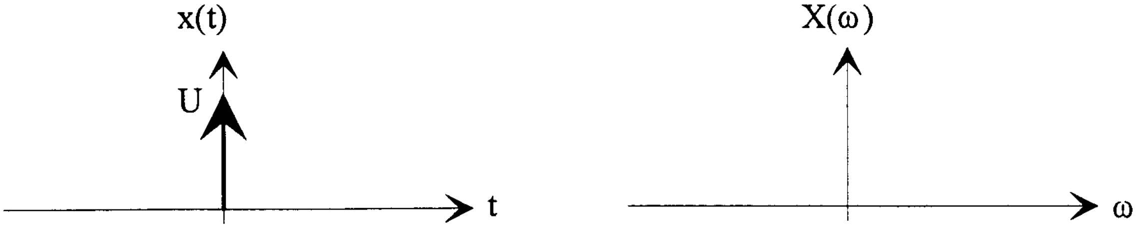
b)



c)

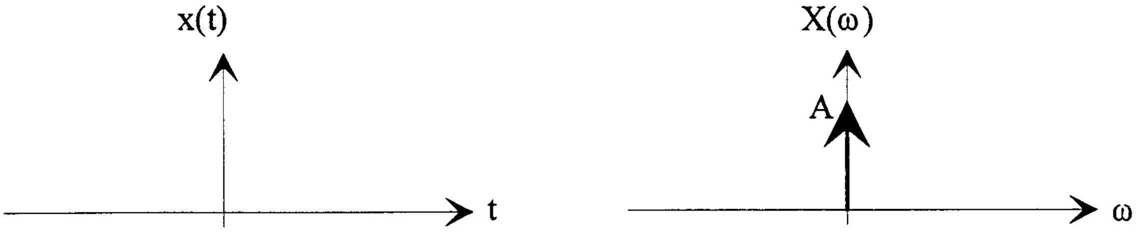


d)

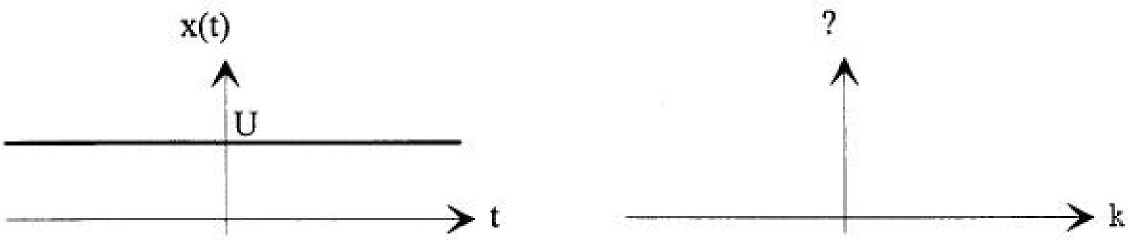


$$x(t) = U \cdot \delta(t)$$

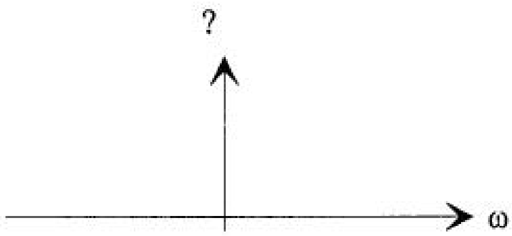
e)



f)

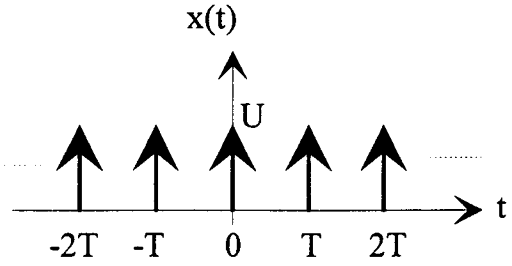


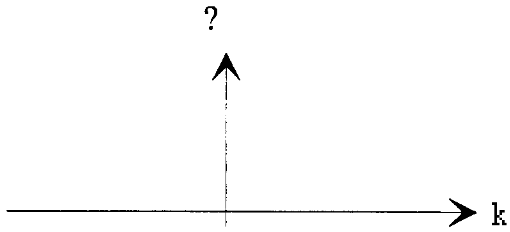
Darstellung als Fourierreihe



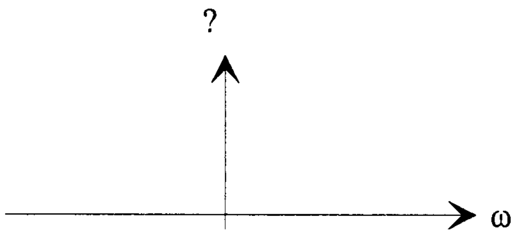
Darstellung als Fouriertransformierte

g)





Darstellung als Fourierreihe



Darstellung als Fouriertransformierte

8. Gegeben ist das folgende zeitkontinuierliche Signal y(t):

$$y(t) = t\, e^{-2t}\, \varepsilon(t-1)$$

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte Y(s) von y(t).

Bestimmen Sie Y(s) ohne Taschenrechner, jedoch mit Hilfe von Transformationstabellen und den Eigenschaften der Laplace-Transformation.

9. Einer Laplace-Transformations-Tabelle entnimmt man das folgende Laplace-Transformiertenpaar:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} \varepsilon(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(s+\alpha)^n} \quad (\mathrm{Re}(s)>-\alpha) \qquad (*)$$

Prüfen Sie (*) für den Fall n = 2 nach.
Bestimmen Sie also ausgehend von der Definition der Laplace-Transformation die Laplace-Transformierte der Funktion auf der linken Seite von (*).

Das Integral zur Bestimmung der Laplace-Transformierten müssen Sie ohne Taschenrechner lösen. Die Stammfunktion des Integranden können Sie jedoch in einer Integraltabelle nachschlagen.

Lösungen

1. $$X_2(\omega) = \frac{3\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(3\pi/4)}\, X_1\left(k\,\frac{3\pi}{4}\right)\, \delta\left(\omega - k\,\frac{\pi}{2}\right)$$

2. a) $c_{1k} = \frac{1}{6} X_3\left(k\,\frac{\pi}{3}\right)$ b) $c_{2k} = \begin{cases} 3\,c_{10} + 2 & (k=0) \\ 3\,e^{-jk(2\pi/3)}\,c_{1k} & (k\neq 0) \end{cases}$

3. a) $$X(\omega) = \begin{cases} -\frac{1}{\omega^2}\left(e^{-j\omega}(-j\omega - 1) + 1\right) & (\omega\neq 0) \\ \frac{1}{2} & (\omega=0) \end{cases}$$

   b) $$c_k = \frac{3}{4}\left(e^{jk(3\pi/4)}\, X_1\left(k\,\frac{3\pi}{4}\right) + e^{-jk(3\pi/4)}\, X_1\left(-k\,\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

4. $$X_3(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{3}\left(X_1\left(k\,\frac{\pi}{3}\right) + X_2\left(k\,\frac{\pi}{3}\right)\right)\delta\left(\omega - k\,\frac{\pi}{3}\right)$$

5. ...

6. ...

7. a) $$X(\omega) = \begin{cases} U\tau\,\dfrac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} & (\omega\neq 0) \\ U\tau & (\omega=0) \end{cases} = U\tau\,\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

   b) $$x(t) = \begin{cases} \dfrac{A\Omega}{\pi}\,\dfrac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} & (t\neq 0) \\ \dfrac{A\Omega}{\pi} & (t=0) \end{cases} = \frac{A\Omega}{\pi}\,\operatorname{sinc}(\Omega t)$$

   c) $$X(\omega) = \frac{2\pi U\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)\delta(\omega - k\omega_0) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$$

   d) $X(\omega) = U$

   e) $x(t) = \frac{A}{2\pi}$

   f) Fourier-Reihe: $c_0 = U$, $c_k = 0$ $(k\neq 0)$
   Fourier-Transformierte: $X(\omega) = 2\pi U\,\delta(\omega)$

   g) Fourier-Reihe: $c_k = \frac{U}{T}$ $(k \in \mathbb{Z})$

   Fourier-Transformierte: $$X(\omega) = \frac{2\pi U}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T}$$

8. $Y(s) = e^{-(s+2)}\,\frac{s+3}{(s+2)^2}$ $\quad \operatorname{Re}(s) > -2$

9. ...