# Übung 13 Laplace-Transformation Eigenschaften

## Lernziele

- wissen und verstehen, dass die Laplace-Transformation gleiche Eigenschaften besitzt wie die Fourier-Transformation.
- die Linearitäts-Eigenschaft der Laplace-Transformation kennen, verstehen und anwenden können.
- den Ähnlichkeitssatz verstehen und anwenden können.
- die Verschiebungssätze verstehen und anwenden können.
- den Ableitungssatz für die Originalfunktion verstehen und anwenden können.
- den Faltungssatz verstehen und anwenden können.
- durch das Studium eines Textes neue Sachverhalte erarbeiten können.

## Einleitung

Die allgemeine Definition der Laplace-Transformation (LT) lautet wie folgt:

$$\text{LT: } A \to B,\ x(t) \to X(s) = \text{LT}\big(x(t)\big) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt,\ s \in C$$

Die Definition der Laplace-Transformation im Buch Papula weicht jedoch in einigen Punkten von der allgemeinen Definition ab:

| | Allgemeine Definition | Definition Papula |
|---|---|---|
| Funktion x(t) | Die Originalfunktion x(t) ist eine **beliebige** Funktion. | Die Originalfunktion x(t) ist eine **rechtsseitige** Funktion mit $x(t) = 0$ für $t<0$. |
| Laplace-Transformation | **Beidseitige** Laplace-Transformation<br><br>Die Integration im Transformations-integral erstreckt sich über **alle** reellen Zahlen ($-\infty < t < \infty$). | **Einseitige** Laplace-Transformation<br><br>Die Integration im Transformations-integral erstreckt sich nur über die **positiven** reellen Zahlen ($0 \le t < \infty$). |
| Variable s | Die Variable s der Bildfunktion X(s) ist eine **komplexe** Grösse ($s \in C$). | Die Variable s der Bildfunktion X(s) ist eine **reelle** Grösse ($s \in R$). |

## Aufgaben

*Linearität*

1. Studieren Sie im Buch Papula den Abschnitt "2.1 Linearität" (Seiten 635 und 636).

2. Papula: 685/1

*Zeitskalierung (Ähnlichkeitssatz)*

3. Studieren Sie im Buch Papula den Abschnitt "2.2 Ähnlichkeitssatz" (Seiten 636 bis 638).

4. Vergleichen Sie den Ähnlichkeitssatz der Laplace-Transformation mit der entsprechenden Eigenschaft der Fourier-Transformation.
   Formulieren Sie den Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation.

5. Papula: 685/2

*Zeitverschiebung (Verschiebungssätze)*

6. Studieren Sie im Buch Papula den Abschnitt "2.3 Verschiebungssätze" (Seiten 638 bis 643).

7. Vergleichen Sie die Verschiebungssätze der Laplace-Transformation mit der entsprechenden Eigenschaft der Fourier-Transformation.
   Formulieren Sie die Verschiebungssätze der Fourier-Transformation.

8. Papula: 686/3, 686/4

*Differentiation (Ableitungssatz)*

9. Studieren Sie im Buch Papula den Abschnitt "2.5.1 Ableitungssatz für die Originalfunktion" (Seiten 644 bis 646).

10. Papula: 686/6, 686/7

*Faltung (Faltungssatz)*

11. Studieren Sie im Buch Papula den Abschnitt "2.7 Faltungssatz" (Seiten 651 bis 654).

12. Die Faltung zweier Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ist allgemein wie folgt definiert (vgl. Unterricht, Thema "Fourier-Transformation"):

$$x_1(t) * x_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau \qquad (*)$$

   Die Integration erstreckt sich also über alle reellen Zahlen ($-\infty < \tau < \infty$).

   Es sei nun angenommen, dass die beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ rechtsseitig sind
   (mit $x_1(t) = x_2(t) = 0$ für $t<0$).

   Zeigen Sie, dass sich unter dieser Annahme die Integration nur noch über das Intervall $0 \le \tau \le t$ erstreckt, dass also die Definition der Faltung im Buch Papula (Formel (VI-43), Seite 651) im Einklang steht mit der allgemeinen Definition (*).

13. Vergleichen Sie den Faltungssatz der Laplace-Transformation mit der entsprechenden Eigenschaft der Fourier-Transformation.
   Formulieren Sie den Faltungssatz der Fourier-Transformation.

14. Papula: 687/12

**Zusatzaufgaben** (freiwillig, gehört nicht zu den geprüften Lerninhalten)

*Lineare Differentialgleichungen*

15. Studieren Sie im Buch Papula den Abschnitt "5.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten" (Seiten 668 bis 675).

16. Papula: 690/1, 690/2, 690/3, 690/4, 691/9, 691/10, 691/11, 691/12

**Lösungen**

1. ...
2. siehe Papula
3. ...
4. $\mathrm{FT}\big(x(at)\big) = \frac{1}{a}\, X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ (Ann.: a>0)
5. siehe Papula
6. ...
7. $\mathrm{FT}\big(x(t-a)\big) = e^{-j\omega a}\, X(\omega)$ (Ann.: a>0)

   $\mathrm{FT}\big(x(t+a)\big) = e^{j\omega a} \left( X(\omega) - \int_0^a x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \right)$ (Ann.: a>0, x(t) = 0 für t<0)
8. siehe Papula
9. ...
10. siehe Papula
11. ...
12. ...
13. $\mathrm{FT}\big(x_1(t) * x_2(t)\big) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
14. siehe Papula
15. ...
16. siehe Papula