Übung 12 Laplace-Transformation
Vergleich mit Fourier-Transformation, Laplace-(Rück-)Transformierte

Lernziele

- einen neuen Sachverhalt analysieren können.
- die Laplace-Transformierte einer einfacheren Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- den Zusammenhang zwischen der Laplace- und der Fourier-Transformierten einer Funktion kennen und verstehen.
- verstehen, dass der Konvergenzbereich ein wesentlicher Bestandteil der Laplace-Transformierten einer Funktion ist.
- den Konvergenzbereich und die Pole einer Laplace-Transformierten skizzieren können.
- aus der Laplace-Transformierten einer Funktion deren Fourier-Transformierte bestimmen können.
- die zu einer Laplace-Transformierten gehörige Rücktransformierte mit Hilfe einer Laplace-Transformations-Tabelle und der Methode der Partialbruchzerlegung bestimmen können.

Aufgaben

1. Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a \quad \mathrm{R} \text{ beliebig})$$

a) Skizzieren Sie den Grafen von x(t) für die drei Fälle a>0, a=0 und a<0.

b) Bestimmen die Laplace-Transformierte X(s) von x(t).
Gehen Sie dabei von der Definition der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das uneigentliche Integral von Hand.

c) Geben Sie die Fourier-Transformierte X(ω) von x(t) an (siehe Übung 7, Aufgabe 1b).
Unterscheiden Sie dabei die drei Fälle a>0, a=0 und a<0.

d) Beurteilen Sie mit Hilfe der Resultate aus b) und c) die folgende Aussage:
"Die Laplace-Transformierte existiert für eine grössere Klasse von Funktionen als die Fourier-Transformierte."

e) Vergleichen Sie die Laplace-Transformierte $X(s) = LT(x(t))$ mit der Fourier-Transformierten $X(\omega) = FT(x(t))$.
Versuchen Sie, ohne Hilfe von Unterlagen einen Zusammenhang zwischen $LT(x(t))$ und $FT(x(t))$ zu finden.

2. Gegeben ist die Funktion

$$x(t) = -e^{-at}\,\varepsilon(-t) \qquad (a \quad \mathrm{R} \text{ beliebig})$$

a) Skizzieren Sie den Grafen von x(t) für die drei Fälle a>0, a=0 und a<0.

b) Bestimmen die Laplace-Transformierte X(s) von x(t).
Gehen Sie dabei von der Definition der Laplace-Transformation aus, und berechnen Sie das uneigentliche Integral von Hand.

c) Vergleichen Sie die Laplace-Transformierte Y(s) mit der Laplace-Transformierten X(s) der Funktion x(t) aus der Aufgabe 1.
Finden Sie eine Gemeinsamkeit und einen Unterschied.

3. Lösen Sie für die gegebene Funktion x(t) die folgenden Teilaufgaben:

   i) Skizzieren Sie den Grafen von x(t).

   ii) Entnehmen Sie die zu x(t) gehörige Laplace-Transformierte X(s) der Laplace-Transformations-Tabelle (kopiertes Blatt), oder bestimmen Sie andernfalls X(s) von Hand durch Berechnen des Transformations-Integrals.

   iii) Skizzieren Sie den Konvergenzbereich von X(s) in der komplexen s-Ebene. Markieren Sie in der Skizze den (die) Pol(e) von X(s).

   iv) Geben Sie die Fourier-Transformierte X(ω) an, falls sie existiert.

   a) $x(t) = e^{-3t}\,\varepsilon(t)$

   b) $x(t) = e^{2t}\,\varepsilon(t)$

   c) $x(t) = \varepsilon(t)$

   d) $x(t) = \delta(t-t_0)$

   e) $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k\,\delta(t-kT)$

   f) $x(t) = \cos(\omega_0 t+\phi)\,\varepsilon(t)$

4. Bestimmen Sie die zur Laplace-Transformierten X(s) gehörige Rücktransformierte x(t).

   Benützen Sie dazu die Laplace-Transformations-Tabelle (kopiertes Blatt) und, falls nötig, die Methode der Partialbruchzerlegung.

   a) $X(s) = \frac{1}{s+1}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s) > -1$

   b) $X(s) = \frac{s}{s^2+4}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s) > 0$

   c) $X(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s) > -2$

   d) $X(s) = \frac{s^2-s+1}{(s+1)^2}$ $\quad$ $\mathrm{Re}(s) > -1$

Lösungen

1. a) ...

b) $X(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+a} & (\mathrm{Re}(s)>-a) \\ \text{nicht definiert} & (\mathrm{Re}(s)\leq -a) \end{cases}$

c) a>0: $X(\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$

a≤0: $X(\omega)$ existiert nicht

d) Die Aussage ist richtig.

a>0: x(t) besitzt sowohl eine Laplace- als auch eine Fourier-Transformierte.

a≤0: x(t) besitzt eine Laplace-, jedoch keine Fourier-Transformierte.

e) $FT(x(t)) = \left[LT(x(t))\right]_{s=j\omega}$

2. a) ...

b) $Y(s) = \begin{cases} \frac{1}{s+a} & (\mathrm{Re}(s)<-a) \\ \text{nicht definiert} & (\mathrm{Re}(s)\geq -a) \end{cases}$

c) Gemeinsamkeit:

Algebraischer Ausdruck

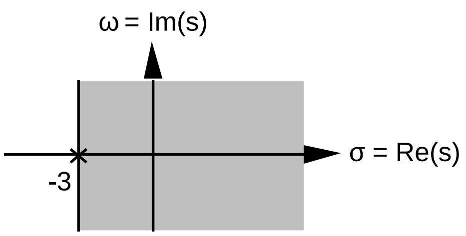
Unterschied:

Konvergenzbereich, d.h. Angabe, für welche s die Laplace-Transformierte existiert

3. a) i) ...

ii) $X(s) = \frac{1}{s+3}$ Re(s) > -3

iii)

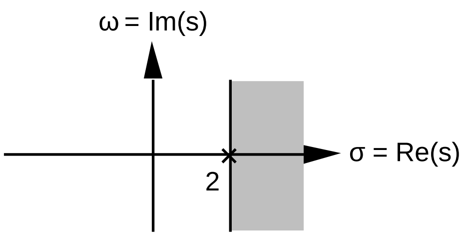


iv) $X(\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$

b) i) ...

ii) $X(s) = \frac{1}{s-2}$ Re(s) > 2

iii)



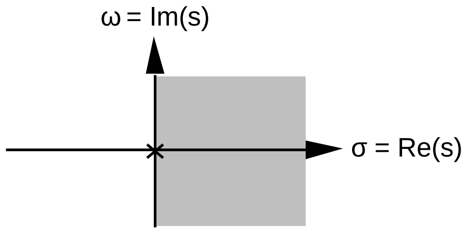
iv) $X(\omega)$ existiert nicht

c) (siehe Seite 4)

c) i) ...

ii) $X(s) = \frac{1}{s}$ Re(s) > 0

iii)

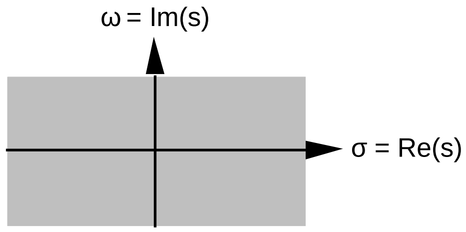


iv) X(ω) existiert nicht

d) i) ...

ii) $X(s) = e^{-st_0}$ alle s

iii)

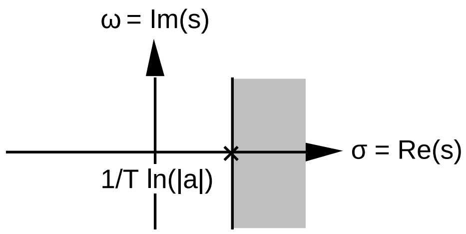


iv) $X(\omega) = e^{-j\omega t_0}$

e) i) ...

ii) $X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (a \cdot e^{-sT})^k = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-sT}}$ $Re(s) > \frac{1}{T} \ln(|a|)$

iii)

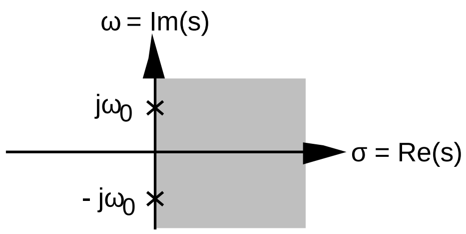


iv) X(ω) existiert für |a|>1.
X(ω) existiert nicht für |a|≤1.

f) i) ...

ii) $X(s) = \frac{s \cdot \cos(\phi) - \omega_0 \cdot \sin(\phi)}{s^2 + \omega_0^2}$ Re(s) > 0

iii)



iv) X(ω) existiert nicht

4. a) $x(t) = e^{-t}\,\varepsilon(t)$ b) $x(t) = \cos(2t)\,\varepsilon(t)$

c) $x(t) = (2e^{-3t} - e^{-2t})\,\varepsilon(t)$ d) $x(t) = \delta(t) + 3(t-1)e^{-t}\,\varepsilon(t)$