Übung 11 Fourier-Transformation Faltung, Modulation

Lernziele

- sich das Faltungsintegral zweier Funktionen grafisch vorstellen können.
- die Faltung zweier einfacher Funktionen grafisch ausführen können.
- das Spektrum eines modulierten Signals mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation bestimmen können.

Aufgaben

Faltung

1. Veranschaulichen Sie sich das Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) \ := \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\ x_2(t-\tau)\ d\tau$$

anhand der beiden konkreten Funktionen

$x_1(t) = e^{-at}\ \varepsilon(t) \quad (a>0)$

$x_2(t) = \varepsilon(t)$

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

a) Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Funktionen:

i) $\tau \rightarrow x_1(\tau)$

ii) $\tau \rightarrow x_2(\tau)$

iii) $\tau \rightarrow x_2(-\tau)$

iv) $\tau \rightarrow x_2(t-\tau)$
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle t>0 und t<0.

v) $\tau \rightarrow x_1(\tau)\cdot x_2(t-\tau)$
Unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle t>0 und t<0.

b) Finden Sie mit Hilfe der Grafen aus a) eine geometrische Veranschaulichung des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\ x_2(t-\tau)\ d\tau$$

2. Die Funktion y(t) sei definiert als Faltung der beiden Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$y(t) := x_1(t) * x_2(t)$

i) Skizzieren Sie die Grafen von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

ii) Bestimmen Sie y(t) auf grafische Weise, d.h. nach dem in der Aufgabe 1 aufgezeigten grafischen Vorgehen.

iii) Skizzieren Sie den Grafen von y(t).

a) $x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$

b) $x_1(t) = \varepsilon(t)$

$x_2(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ 0 & (t<0 \quad t>1) \end{cases}$

c) * $x_1(t) = \begin{cases} t & (0 \le t \le 1) \\ -t+2 & (1 \le t \le 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$

$x_2(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 2) \\ 0 & (t<0 \quad t>2) \end{cases}$

3. Studieren Sie das Java-Applet "Faltung", welches das Faltungsintegral zweier Funktionen veranschaulicht. Sie finden einen Link auf das Applet unter:

   http://www.tel.fh-htwchur.ch/~borer → Mathematik → Unterlagen (...) → Faltung

Modulation

4. Ein beliebiges Signal x(t) mit Spektrum X(ω) wird mit dem folgenden cosinus-förmigen Signal m(t) moduliert:

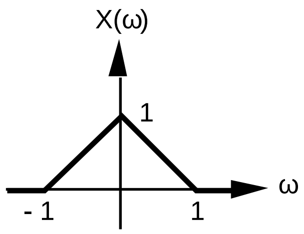
   $m(t) = \cos(\omega_0 t)$

   a) Entnehmen Sie einer Fourier-Transformtions-Tabelle das Spektrum M(ω) von m(t).

   b) Skizzieren Sie den Grafen von M(ω).

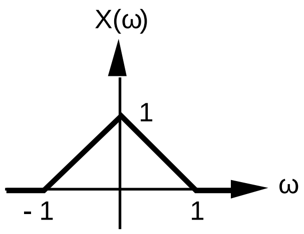
   c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Modulationseigenschaft der Fourier-Transformation das Spektrum $X_m(\omega)$ des modulierten Signals $x_m(t) := x(t)\cdot m(t)$.

   d) Skizzieren Sie den Grafen von $X_m(\omega)$ unter der Annahme, dass der Graf von X(ω) die folgende Form habe:



   e) Erklären Sie in eigenen Worten, wie das Spektrum $X_m(\omega)$ aus dem Spektrum X(ω) hervorgeht, bzw. wie sich das Spektrum eines beliebigen Signals verändert, wenn man das Signal mit einem cosinus-förmigen Signal moduliert.

5. Gegeben ist das Spektrum X(ω) des Signals x(t):



   Das Signal wird mit dem Signal m(t) moduliert.

   Bestimmen Sie den grafischen Verlauf des Spektrums des modulierten Signals $x_m(t) := x(t)\cdot m(t)$.

   a) $m(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

   b) $m(t) = \cos(t)$

Lösungen

1. a) ...

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\, x_2(t-\tau)\, d\tau$

   ist die Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $\tau \to x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)$ und der τ-Achse.

2. a) i) ...

   ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0 \quad t>2) \\ t & (0 \le t \le 1) \\ -t+2 & (1 \le t \le 2) \end{cases}$

   iii) ...

   b) i) ...

   ii) $y(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ \frac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ \frac{1}{2} & (t>1) \end{cases}$

   iii) ...

   c) * i) ...

   ii) $y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & (0 \le t \le 1) \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 & (1 \le t \le 3) \\ \frac{t^2}{2} - 4t + 8 & (3 \le t \le 4) \\ 0 & (t<0 \quad t>4) \end{cases}$

   iii) ...

3. ...

4. a) $M(\omega) = \pi\, \delta(\omega+\omega_0) + \pi\, \delta(\omega-\omega_0)$

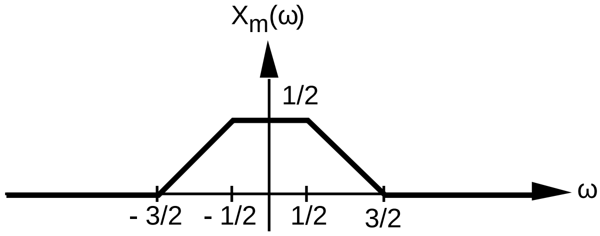
   b) ...

   c) $X_m(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega-\omega_0)$

   d) ...

   e) ...

5. a)



   b)