Übung 10 — Fourier-Transformation
Symmetrie, Zeitverschiebung, Zeitskalierung, Linearität

Lernziele

- wissen und verstehen, dass der Betrag der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion gerade ist.
- wissen und verstehen, dass das Argument der Fourier-Transformierten einer reellen Funktion ungerade ist.
- die Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation an einer konkreten Funktion nachprüfen können.
- grafisch beurteilen können, wie sich eine Zeitskalierung bei einer Funktion auf deren Fourier-Transformierte auswirkt.
- die Zeitverschiebungs-, die Zeitskalierungs- und die Linearitäts-Eigenschaft der Fourier-Transformation bei der Bestimmung der Fourier-Transformierten anwenden können.

Aufgaben

1. Die Fourier-Transformierte einer reellen Funktion x(t) besitzt die folgenden Symmetrieeigenschaften:

(1) $X(-\omega) = \big(X(\omega)\big)^*$

(2) $|X(\omega)|$ gerade
(3) $\arg\big(X(\omega)\big)$ ungerade

(4) $x(t)$ gerade $X(\omega)$ reell $X(\omega)$ gerade
(5) $x(t)$ ungerade $X(\omega)$ rein imaginär $X(\omega)$ ungerade

Im Unterricht wurde die Symmetrieeigenschaft (1) erläutert.

a) Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaften (1), (2) und (3) anhand der folgenden Funktion nach:

$$x(t) = e^{-at}\,\varepsilon(t) \quad (a>0)$$

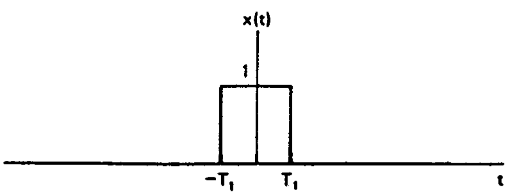
b) Prüfen Sie die Symmetrieeigenschaft (4) am Beispiel der folgenden geraden Funktion nach:

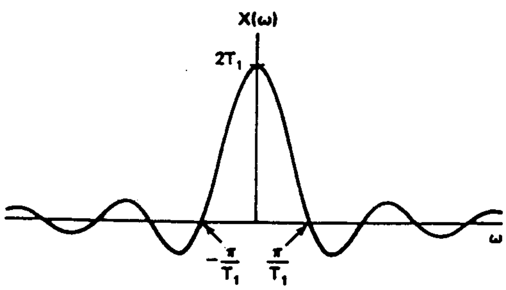
$$x(t) = \begin{cases} 1 & \big(|t|<T_1\big) \\ 0 & \big(|t|>T_1\big) \end{cases} \qquad (T_1>0)$$

Hinweis:
Die Fourier-Transformierten der beiden Funktionen haben Sie bereits in der Übung 7 bestimmt.

c) * Zeigen Sie, dass die Symmetrieeigenschaften (2) und (3) aus der Symmetrieeigenschaft (1) folgen.

2. Gegeben sind die Grafen der Funktion x(t) und deren Fourier-Transformierten X(ω):





Die Funktion $x_a(t)$ sei definiert durch $x_a(t) := x(at)$ (a R)

a) i) Skizzieren Sie auf einem Blatt nebeneinander die Grafen der Funktionen
$x_a(t)$ für $0<a<1$
$x(t)$
$x_a(t)$ für $a>1$

ii) Skizzieren Sie auf dem gleichen Blatt darunter die Grafen der dazugehörigen Fourier-Transformierten

$X_a(\omega)$ für $0<a<1$
$X(\omega)$
$X_a(\omega)$ für $a>1$

b) Im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation wird auch von der "Inversen Beziehung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich" gesprochen.

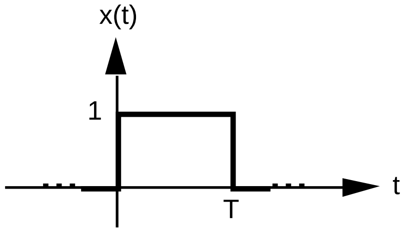
Betrachten Sie die Grafen aus der Aufgabe a). Versuchen Sie mit Hilfe dieser Grafen herauszufinden, was unter der "Inversen Beziehung zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich" gemeint sein könnte.

Schreiben Sie das Ergebnis Ihrer Betrachtung in zwei bis drei Sätzen nieder.

3. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X(\omega)$ der Funktion $x(t)$.

Benützen Sie dazu lediglich die Fourier-Transformations-Tabelle (kopiertes Blatt), und wenden Sie die Eigenschaften der Fourier-Transformation an.

a)

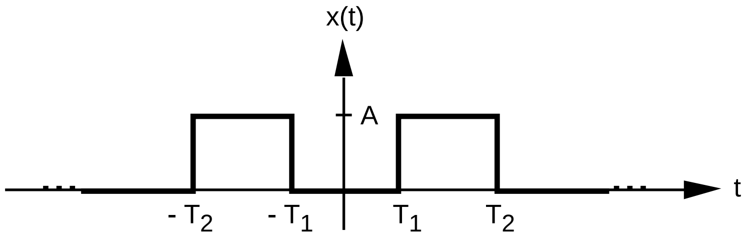


b) $x(t) = (t-4)^2\, e^{-2(t-4)}\, \varepsilon(t-4)$

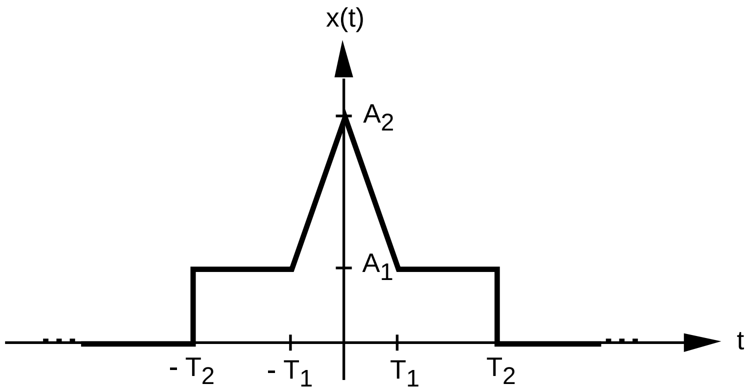
c) $x(t) = A \sin(at+b)$ $(A>0,\ a>0,\ b\neq 0)$

d) $x(t) = 2 \sin(3t+4) + 5 \sin(6t+7)$

e)



f)



Lösungen

1. a) (1) $X(-\omega) = \left(X(\omega)\right)^* = \frac{1}{a-j\omega}$

(2) $|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ gerade

(3) $\arg\left(X(\omega)\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$ ungerade

b) ...

c) * ...

2. a) ...

b) ...

3. a) $X(\omega) = \begin{cases} T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega T/2} & (\omega \neq 0) \\ T & (\omega = 0) \end{cases}$

b) $X(\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)^3} e^{-j4\omega}$

c) $X(\omega) = A\, j\, \pi \left(\delta(\omega+a) - \delta(\omega-a)\right) e^{j\omega b/a}$

d) $X(\omega) = j\, \pi \left(2\left(\delta(\omega+3) - \delta(\omega-3)\right) e^{j\omega 4/3} + 5\left(\delta(\omega+6) - \delta(\omega-6)\right) e^{j\omega 7/6}\right)$

e) $X(\omega) = \begin{cases} A\left(2T_2 \frac{\sin(\omega T_2)}{\omega T_2} - 2T_1 \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega T_1}\right) & (\omega \neq 0) \\ A\,(2T_2 - 2T_1) & (\omega = 0) \end{cases}$

f) $X(\omega) = \begin{cases} 2A_1T_2 \frac{\sin(\omega T_2)}{\omega T_2} + (A_2 - A_1)\, T_1 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega T_1}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T_1}{2}\right)^2} & (\omega \neq 0) \\ 2A_1T_2 + (A_2 - A_1)\, T_1 & (\omega = 0) \end{cases}$