# Übung 3 — Reelle Fourier-Reihe<br>Konstanter Anteil, Spezielle Funktionen, Linearität

**PUZZLE**

## Themen

**1 Konstanter Anteil**

**2 Gerade / ungerade Funktion**

**3 Konstante / trigonometrische Funktion**

**4 Linearität**

## Lernziele

**1 Konstanter Anteil**
- verstehen, dass der konstante Anteil in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion der zeitliche Mittelwert der Funktion über eine Grundperiode ist.
- verstehen, dass sich in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion nur der konstante Anteil ändert, wenn man die Funktion mit einer Konstanten addiert.

**2 Gerade / ungerade Funktion**
- verstehen, was eine gerade, ungerade Funktion ist.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer geraden periodischen Funktion eine reine Cosinus-Reihe ist.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer ungeraden periodischen Funktion eine reine Sinus-Reihe ohne konstanten Anteil ist.

**3 Konstante / trigonometrische Funktion**
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer konstanten Funktion weder Cosinus- noch Sinus-Glieder enthält sondern lediglich einen konstanten Anteil.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Cosinus-Funktion ein einziges Cosinus-Glied enthält.
- verstehen, dass die reelle Fourier-Reihe einer reinen Sinus-Funktion ein einziges Sinus-Glied enthält.

**4 Linearität**
- verstehen, wie sich die reellen Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion aus den reellen Fourier-Koeffizienten von Teilfunktionen zusammensetzen.

## Aufgaben

**1 Konstanter Anteil**

*Einzelstudium*

Die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion besteht aus dem konstanten Anteil $a_0/2$ und aus Cosinus- und Sinus-Gliedern.

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden folgenden Aussagen über den konstanten Anteil wahr sind:

> Der konstante Anteil $a_0/2$ ist gleich dem zeitlichen Mittelwert der Funktion $x(t)$ über eine Grundperiode $T_0$.
>
> Addiert man die Funktion $x(t)$ mit einer Konstanten, so ändert sich in der reellen Fourier-Reihe von $x(t)$ nur der konstante Anteil. Die Cosinus- und Sinus-Glieder bleiben unverändert.

Hinweis:
Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k N), $b_k$ (k N).

*Expertenrunde*

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

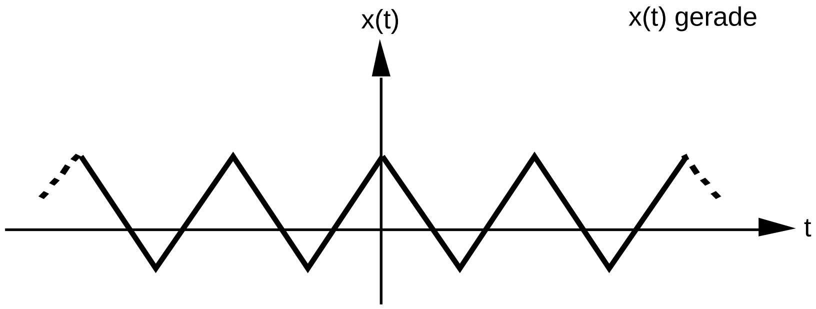
*Unterrichtsrunde*

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 1.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 2, 3, 4 unterrichten.

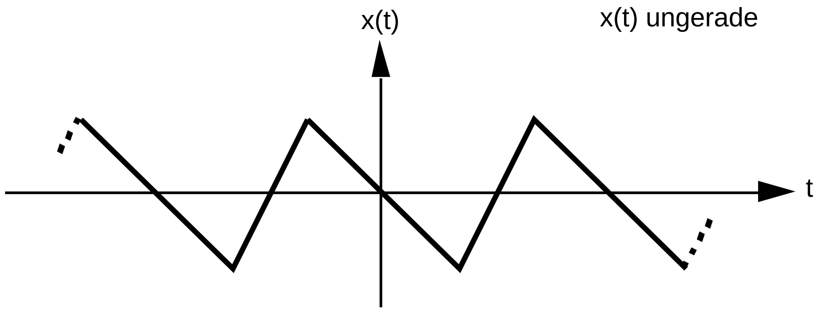
## 2 Gerade / ungerade Funktion

*Einzelstudium*

Eine Funktion x(t) nennt man eine **gerade** Funktion, falls
- der Graf von x(t) achsensymmetrisch zur Ordinate ("y-Achse") ist.
- für alle t  R gilt: x(-t) = x(t)




Eine Funktion x(t) nennt man eine **ungerade** Funktion, falls
- der Graf von x(t) punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
- für alle t  R gilt: x(-t) = -x(t)




Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die beiden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer periodischen, geraden bzw. ungeraden Funktion x(t) wahr sind:

x(t) **gerade** ⇔ Die Fourier-Koeffizienten $b_k$ (k  N) sind alle gleich Null, d.h. die reelle Fourier-Reihe von x(t) nebst dem konstanten Anteil nur **Cosinus**-Glieder, jedoch keine Sinus-Glieder:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_0 t)$$

x(t) **ungerade** ⇔ Die Fourier-Koeffizienten $a_0$ und $a_k$ (k  N) sind alle gleich Null, d.h. die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur **Sinus**-Glieder, jedoch weder einen konstanten Anteil noch Cosinus-Glieder:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$$

Hinweise:
- Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k  N), $b_k$ (k  N).

- Legen Sie die Integrationsgrenzen symmetrisch zu $t = 0$, also $-T_0/2$ und $T_0/2$.
- Überlegen Sie sich, dass ein Integral mit symmetrischen Integrationsgrenzen (z.B. $-T_0/2$ und $T_0/2$) gleich Null ist, falls der Integrand eine ungerade Funktion ist.

*Expertenrunde*

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

*Unterrichtsrunde*

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 2.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 3, 4 unterrichten.

## 3 Konstante / trigonometrische Funktion

*Einzelstudium*

Finden Sie schlüssige Erklärungen dafür, dass die drei folgenden Aussagen über die reelle Fourier-Reihe einer konstanten bzw. einer trigonometrischen Funktion x(t) wahr sind:

$x(t) = c = \text{konst.}$ ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält weder Cosinus- noch Sinus-Glieder sondern lediglich einen konstanten Anteil:

$x(t) = \frac{a_0}{2}$ mit $a_0 = 2c$

Bemerkung:
Eine konstante Funktion kann als eine periodische Funktion mit beliebiger Grundperiode aufgefasst werden.

$x(t) = A\cdot\cos(at)$ ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur ein einziges Cosinus-Glied:

$x(t) = a_1\cdot\cos(\omega_0 t)$ mit $a_1 = A$ und $\omega_0 = a$

$x(t) = A\cdot\sin(at)$ ⇔ Die reelle Fourier-Reihe von x(t) enthält nur ein einziges Sinus-Glied:

$x(t) = b_1\cdot\sin(\omega_0 t)$ mit $b_1 = A$ und $\omega_0 = a$

Hinweise:
- Betrachten Sie die Integrale zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten $a_0$, $a_k$ (k  N), $b_k$ (k  N).
- Betrachten Sie die Werte der Integrale in der Übung 1, Aufgabe 4.

*Expertenrunde*

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

*Unterrichtsrunde*

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 3.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 4 unterrichten.

## 4 Linearität

*Einzelstudium*

Eine periodische Funktion x(t) sei darstellbar als Linearkombination zweier periodischer Teilfunktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$:

$x(t) = \lambda_1\cdot x_1(t) + \lambda_2\cdot x_2(t)$ ($\lambda_1$, $\lambda_2$  R)

Mit $a_0$, $a_k$ (k  N) und $b_k$ (k  N) seien die reellen Fourier-Koeffizienten von x(t) bezeichnet.
Mit $a_{0,1}$, $a_{k,1}$ (k  N) und $b_{k,1}$ (k  N) seien die reellen Fourier-Koeffizienten von $x_1(t)$ bezeichnet.
Mit $a_{0,2}$, $a_{k,2}$ (k  N) und $b_{k,2}$ (k  N) seien die reellen Fourier-Koeffizienten von $x_2(t)$ bezeichnet.

Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden drei Aussagen über die reellen Fourier-Koeffizienten von x(t), $x_1(t)$ und $x_2(t)$ wahr sind oder nicht:

(1) $a_0 = \lambda_1 \cdot a_{0,1} + \lambda_2 \cdot a_{0,2}$

(2) $a_k = \lambda_1 \cdot a_{k,1} + \lambda_2 \cdot a_{k,2}$ (k N)

(3) $b_k = \lambda_1 \cdot b_{k,1} + \lambda_2 \cdot b_{k,2}$ (k N)

Die drei Aussagen könnte man etwa wie folgt in einem deutschen Satz zusammenfassen:
*Die Fourier-Koeffizienten der Funktion x(t) setzen sich "auf gleiche Art und Weise" aus den Fourier-Koeffizienten der Teilfunktionen zusammen wie sich die Funktion selber aus den Teilfunktionen zusammensetzt.*

a) Nehmen Sie an, dass $x_1(t)$ und $x_2(t)$ die **gleiche** Grundperiode besitzen.
b) * Worin liegt die Problematik, falls $x_1(t)$ und $x_2(t)$ **unterschiedliche** Grundperioden besitzen?

*Expertenrunde*

Diskutieren Sie gemeinsam die Aufgabe, die Sie im Einzelstudium bearbeitet haben, und klären Sie in der Gruppe alle Unklarheiten ab.

*Unterrichtsrunde*

Unterrichten Sie Ihre Kollegen/-innen über Ihr Thema 4.
Lassen Sie sich von Ihren Kollegen/-innen über die Themen 1, 2, 3 unterrichten.