

## Übung 2 Reelle Fourier-Reihe Bestimmung der reellen Fourier-Koeffizienten, Fourier-Synthese

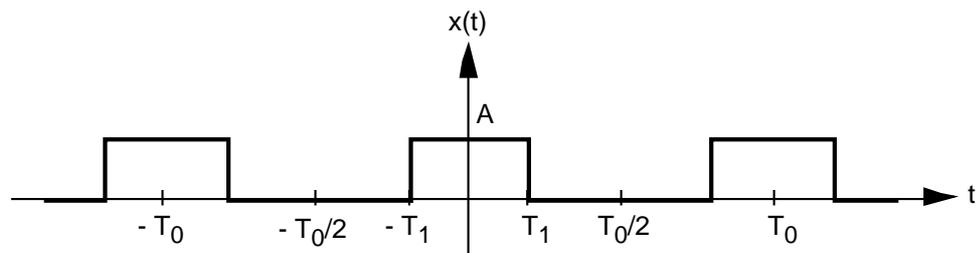
### Lernziele

- die reellen Fourier-Koeffizienten einer einfacheren periodischen Funktion von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle bestimmen können.
- verstehen, wie sich die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion aus den einzelnen Fourier-Komponenten zusammensetzt.

### Aufgaben

1. Gegeben ist die folgende periodische Rechtecks-Funktion  $x(t)$  (Beispiel auf den Theorieblättern "Reelle Fourier-Reihe"):

$$x(t) = \begin{cases} A & (|t| < T_1) \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$$

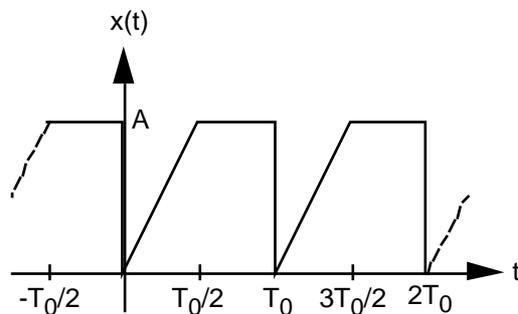


- a) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) von  $x(t)$  von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.

Betrachten Sie nun den Spezialfall  $A := 1$ ,  $T_1 := \frac{T_0}{4}$

- b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten, d.h. vereinfachen Sie die Resultate aus a).  
 c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

2. Gegeben ist der Graf einer periodischen Funktion  $x(t)$ :



- a) Geben Sie  $x(t)$  analytisch an, d.h. die Funktionsgleichung  $x(t) = \dots$   
 b) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $b_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) von  $x(t)$  von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.  
 c) Schreiben Sie die ersten paar Glieder der reellen Fourier-Reihe auf.

3. Konsultieren Sie im Internet ein Java-Applet, in welchem die **Fourier-Synthese**, d.h. die Bildung der Fourier-Reihe einer periodischen Funktion veranschaulicht wird. Links auf zwei Java-Applets finden Sie unter:

<http://www.tel.fh-htwchur.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...) Fourier-Synthese

Durch Schieberegler können die einzelnen Fourier-Komponenten (sin- bzw. cos-Glieder) eingestellt werden.

Versuchen Sie, die folgenden periodischen Funktionen möglichst gut anzunähern:

- Funktionen der Aufgaben 1 und 2
  - Funktionen, deren reelle Fourier-Reihen bzw. -Koeffizienten tabelliert sind (vgl. Papula 2, Seiten 173 und 174)
  - eigene Beispiele von periodischen Funktionen
4. \* Erstellen Sie mit dem Computerprogramm **MAPLE** ein File, mit welchem die reelle Fourier-Reihe einer periodischen Funktion  $x(t)$  bestimmt werden kann.

Das MAPLE-File sollte die folgenden Anforderungen erfüllen:

- Wahl einer beliebigen periodischen Funktion  $x(t)$  durch den Anwender
- Aufzeichnen des Grafen von  $x(t)$  über mindestens eine Grundperiode
- Berechnung aller reellen Fourier-Koeffizienten  $a_0$ ,  $a_k$  ( $k \leq N$ ) und  $b_k$  ( $k \leq N$ ) von  $x(t)$
- Berechnung der Näherungsfunktionen  $x_N(t)$  für eine beliebige Wahl von  $N$

$$x_N(t) := a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t))$$

(Die Näherungsfunktion  $x_N(t)$  entspricht der reellen Fourier-Reihe von  $x(t)$  mit Abbruch nach  $N$  Gliedern.)

- Aufzeichnen des Grafen von  $x_N(t)$  für  $N = 0, 1, 2, \dots$  und Vergleich mit dem Grafen von  $x(t)$
- Grafische Ersichtlichkeit, dass sich die Näherungsfunktionen  $x_N(t)$  für wachsendes  $N$  der Funktion  $x(t)$  annähern.
- (evtl. weitere von Ihnen formulierte Anforderungen)

**Lösungen**

1. a)  $a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) dt = \dots = \frac{2AT_1}{T_0}$   
 $a_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \cos(k \omega_0 t) dt = \dots = \frac{2A \cdot \sin(k \omega_0 T_1)}{k}$   
 $b_k = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} x(t) \cdot \sin(k \omega_0 t) dt = \dots = 0$

b)  $a_0 = 1$   
 $\frac{2}{k} \quad (k = 1, 5, 9, \dots)$   
 $a_k = -\frac{2}{k} \quad (k = 3, 7, 11, \dots)$   
 $0 \quad (k \text{ gerade})$   
 $b_k = 0$

c)  $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos(\omega_0 t) - \frac{2}{5} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{2}{7} \cos(5 \omega_0 t) - \frac{2}{9} \cos(7 \omega_0 t) + \dots$

2. a)  $x(t) = \begin{cases} \frac{2A}{T_0} t & 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ A & \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}, \quad x(t+T_0) = x(t)$

b)  $a_0 = \frac{3A}{2}$   
 $a_k = -\frac{2A}{k^2 \cdot 2} \quad (k \text{ ungerade})$   
 $0 \quad (k \text{ gerade})$   
 $b_k = -\frac{A}{k}$

c)  $x(t) = \frac{3A}{4} - \frac{2A}{2} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{9} \cos(3 \omega_0 t) + \frac{1}{25} \cos(5 \omega_0 t) + \dots \right)$   
 $- \frac{A}{2} \left( \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2 \omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3 \omega_0 t) + \dots \right)$

3. ...

4. MAPLE-Muster-Files, die den formulierten Anforderungen jedoch nur teilweise genügen, finden Sie unter:

<http://www.tel.fh-htwchur.ch/~borer> Mathematik Unterlagen (...)

**Integraltabelle**

$\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$

$\int \cos(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$

$\int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$

$\int x \cdot \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \sin(ax)}{a} + C \quad (a \neq 0)$