Übung 1 — Fourier-Reihen
Trigonometrische Basisfunktionen, Periodizität, Linearität, Integrale

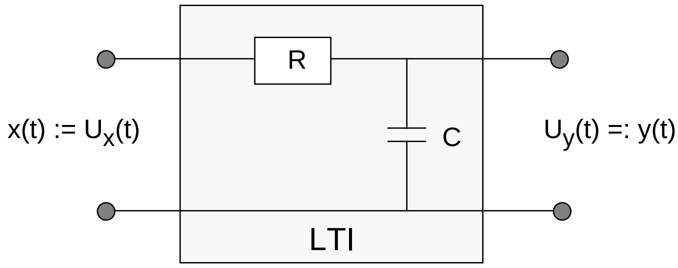
Lernziele

- verstehen, warum es sinnvoll ist, eine Funktion als Linearkombination von geeigneten Basisfunktionen darzustellen.
- verstehen, warum es sinnvoll ist, ein periodisches Signal, welches durch ein lineares, zeitinvariantes System läuft, als Linearkombination von sinusförmigen Basissignalen darzustellen.
- die Grundperiode einer Sinus- bzw. Cosinus-Funktion kennen.
- verstehen, dass die Grundfrequenz der in der reellen Fourier-Reihe einer periodischen Funktion auftretenden Basisfunktionen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz der periodischen Funktion sind.
- einfachere Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle lösen können.

Aufgaben

1. **Trigonometrische Basisfunktionen**

Im Unterrichtszimmer ist die folgende RC-Schaltung aufgebaut (R = 1 kΩ , C = 100 nF):



Die Schaltung bildet ein lineares, zeitinvariantes System (LTI-System).
Die an der Schaltung angelegte Spannung $U_x(t)$ entspricht dem Eingangssignal x(t).
Die Spannung $U_y(t)$ über dem Kondensator enspricht dem Ausgangssignal y(t).

Ein Funktions-Generator liefert das Eingangssignal x(t). Der zeitliche Verlauf des Eingangssignals x(t) und des Ausgangssignals y(t) können auf einem Kathodenstrahl-Oszillografen (KO) betrachtet werden.

Die Werte von R und C sind gegeben durch R = 1 kΩ und C = 100 nF.

a) Stellen Sie am Funktions-Generator ein **sinusförmiges** Signal mit der Amplitude 0.5 V (1 V peak-to-peak) und der Frequenz 1 kHz ein.
Stellen Sie am KO fest:
- Das Augangssignal ist ebenfalls ein **sinusförmiges** Signal
- Die **Frequenz** ist gleich wie beim Eingangssignal. Lediglich **Amplitude** und **Phase** haben sich verändert.

b) Variieren Sie am Funktions-Generator die Frequenz des Eingangssignals.
Stellen Sie am KO fest:
- Das Ausgangssignal hat immer die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal.
- Die Amplitude und die Phase des Ausgangssignals hängen von der Frequenz ab.

Begründen sie, dass es sich beim betrachteten System um ein Tiefpassfilter handelt.

c) Stellen Sie nun am Funktions-Generator ein **Dreieckssignal** ein.
Stellen Sie am KO fest:
- Das Ausgangssignal ist **kein Dreieckssignal** mehr.

2. **Periodizität**

a) Bestimmen Sie die Grundperiode T_0 der folgenden Funktionen:

i) $x(t) = \sin(t)$
ii) $x(t) = \sin(2t)$

iii) $x(t) = \sin(3t)$
iv) $x(t) = \sin(at)$ (a R^+)

b) $x(t)$ sei eine periodische Funktion mit der Grundperiode T_0 und der Grundfrequenz $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$

Überprüfen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a), dass die folgenden beiden Aussagen richtig sind:

i) Die Grundfrequenz der Funktion $\phi_1(t) = \sin(\omega_0 t)$ ist gleich gross wie die Grundfrequenz von $x(t)$.

ii) Die Grundfrequenz der Funktion $\phi_k(t) = \sin(k\omega_0 t)$ ist k-mal so gross wie die Grundfrequenz von $x(t)$.

c) Überlegen Sie sich, dass die Ergebnisse aus a) und b) sinngemäss auch für die entsprechenden Cosinus-Funktionen gelten.

3. **Linearität**

In dieser Aufgabe soll die folgende Analogie aufgezeigt werden:

Ein Signal $x(t)$ durchläuft ein lineares System.
↕
Ein Vektor $\vec{x}$ wird einer linearen Abbildung (hier: Drehung) unterzogen.

Gegeben sei der folgende Vektor $\vec{x}$ im dreidimensionalen Raum:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{x}$ soll um 90° um die z-Achse gedreht werden.
Gesucht ist der zu $\vec{x}$ gehörige Bildvektor $\vec{y}$.

a) Finden Sie eine Methode, um den Bildvektor $\vec{y}$ möglichst einfach zu bestimmen.
Die Methode soll eine Zerlegung von $\vec{x}$ in möglichst günstige Basisvektoren beinhalten.
Beschreiben Sie das Vorgehen in ein paar Stichworten.

b) Erklären Sie, worin die in der Einleitung dieser Aufgabe erwähnte Analogie besteht.

4. **Integrale**

In der Herleitung der Formeln zur Berechung der reellen Fourier-Koeffizienten von periodischen Funktionen treten die nachstehenden Integrale auf.

Bestimmen Sie die Integrale von Hand und mit Hilfe einer Integraltabelle.
Es gilt jeweils $\omega_0 := \frac{2\pi}{T_0}$, k N beliebig, m N beliebig

a) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\, dt$

b) $\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t)\, dt$

c) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t)\, dt$

d) $\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t)\, dt$

e) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t)\, dt$

Lösungen

1. ...

2. a)
   - i) $T_0 = 2\pi$
   - ii) $T_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$
   - iii) $T_0 = \frac{2\pi}{3}$
   - iv) $T_0 = \frac{2\pi}{a}$

   b) ...

   c) ...

3. a)
   - $\vec{x}$ darstellen als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$:

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} = 2\,\vec{e}_1 + 4\,\vec{e}_2 + 5\,\vec{e}_3$$

   - Drehung auf die einzelnen Basisvektoren anwenden:

   $$\vec{e}_1 \rightarrow \vec{e}_2$$
   $$\vec{e}_2 \rightarrow -\vec{e}_1$$
   $$\vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_3$$

   - Bildvektor als Linerkombination der Bildvektoren der Basisvektoren zusammensetzen:

   $$\vec{y} = 2\,\vec{e}_2 + 4\left(-\vec{e}_1\right) + 5\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$$

   b) Analogie in tabellarischer Darstellung:

Signal x(t)	Vektor $\vec{x}$
Das Signal x(t) durchläuft ein lineares System.	Der Vektor $\vec{x}$ wird einer linearen Abbildung unterworfen.
Basisignale $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, ...	Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$
Das Signal x(t) wird dargestellt als Linearkombination der Basissignale $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, ...	Der Vektor wird dargestellt als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$
Die Basissignale $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, ... verhalten sich bezüglich des betrachteten Systems sehr einfach.	Die Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ verhalten sich gegenüber der betrachteten Abbildung sehr einfach.
Das Ausgangssignal y(t) setzt sich zusammen als Linearkombination der Ausgangssignale der einzelnen Basissignale.	Der Bildvektor $\vec{y}$ setzt sich zusammen als Linearkombination der Bildvektoren der einzelnen Basisvektoren.

4. a) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\,dt = 0$

b) $\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t)\,dt = 0$

c) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\cdot\sin(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \frac{T_0}{2} & (k = m) \end{cases}$

d) $\int_0^{T_0} \cos(k\omega_0 t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ \frac{T_0}{2} & (k = m) \end{cases}$

e) $\int_0^{T_0} \sin(k\omega_0 t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\,dt = 0$

Integraltabelle

$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$ $(a \neq 0)$

$\int \cos(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$ $(a \neq 0)$

$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C$ $(|a| \neq |b|)$

$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$ $(a \neq 0)$

$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C$ $(|a| \neq |b|)$

$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$ $(a \neq 0)$

$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C$ $(|a| \neq |b|)$

$\int \sin(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a} + C$ $(a \neq 0)$