

## PUZZLE

### Analyse von Funktionen

#### Thema 1: Stetigkeit

##### Lernziele

- wissen und verstehen, was es heisst, eine Funktion sei an einer Stelle stetig.
- beurteilen können, ob eine Funktion an einer bestimmten Stelle stetig ist oder nicht.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

##### Theorie

Gegeben ist eine Funktion f:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad (D \subset \mathbb{R})$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Def.: Die Funktion f ist an der Stelle  $x_0 \in D$  **stetig**, falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Die Funktion f heisst **stetig**, falls sie an jeder Stelle  $x_0 \in D$  stetig ist.

Bem.: Die Frage der Stetigkeit stellt sich nur für eine Stelle  $x_0 \in D$ . Eine Stelle  $x_0$ , die nicht im Definitionsbereich D liegt, kann daher nicht als Unstetigkeitsstelle bezeichnet werden.

##### Aufgaben

1. Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion f, welche an der Stelle  $x_0 \in D$  stetig ist.
2. Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion f, welche an der Stelle  $x_0 \in D$  nicht stetig ist, weil ...
  - a) ... der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  zwar existiert, aber nicht gleich  $f(x_0)$  ist, also  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ .
  - b) ... der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  gar nicht existiert.
3. Beurteilen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Stelle  $x_0 = 1$  stetig sind oder nicht:
  - a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 
$$x \rightarrow y = f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ x - 2 & (x > 1) \end{cases}$$
  - b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 
$$x \rightarrow y = g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$
4. Geben Sie die konkrete analytische Funktionsvorschrift einer Funktion f an, die an der Stelle  $x_0 = 2$  unstetig ist.

## Thema 2: Nullstellen, Polstellen

### Lernziele

- wissen und verstehen, was eine Nullstelle einer Funktion ist.
- die Nullstelle(n) einer Funktion bestimmen können.
- wissen und verstehen, was eine Polstelle einer Funktion ist.
- die Polstelle(n) einer Funktion bestimmen können.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

### Theorie

Gegeben ist eine Funktion  $f$ :

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} & (D \subset \mathbb{R}) \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

Def.: Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $x_0 \in D$  eine **Nullstelle**, falls  $f(x_0) = 0$ .

Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}$  eine **Polstelle**, falls  $x_0 \notin D$  und  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  für  $x \rightarrow x_0$ .

### Aufgaben

1. Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion  $f$ , welche an der Stelle  $x_0$  eine Nullstelle besitzt.
2. Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden Funktionen:
  - a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = f(x) = 6x^3 - 3x^2 - 6x$
  - b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = g(x) = x^2 + 4$
  - c)  $h: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = h(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$
3. Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion  $f$ , welche an der Stelle  $x_0$  eine Polstelle besitzt.
4. Bestimmen Sie alle Polstellen der folgenden Funktionen:
  - a)  $f: \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+2)(x-2)(x+3)}$
  - b)  $g: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$
  - c)  $p: \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \wedge k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = p(x) = \tan(x)$
  - d)  $q: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = q(x) = \tan(x)$
5. Geben Sie die konkrete analytische Funktionsvorschrift einer Funktion  $f$  an, die an der Stelle  $x_1 = 2$  eine Nullstelle und an der Stelle  $x_2 = 5$  eine Polstelle besitzt.

### Thema 3: Monotonie, Symmetrie

#### Lernziele

- wissen und verstehen, was es heisst, eine Funktion sei in einem Intervall monoton bzw. streng monoton wachsend.
- wissen und verstehen, was es heisst, eine Funktion sei in einem Intervall monoton bzw. streng monoton fallend.
- beurteilen können, ob eine Funktion auf einem Intervall monoton bzw. streng monoton wachsend ist oder nicht.
- beurteilen können, ob eine Funktion auf einem Intervall monoton bzw. streng monoton fallend ist oder nicht.
- wissen und verstehen, was es heisst, eine Funktion sei gerade bzw. ungerade.
- beurteilen können, ob eine Funktion gerade bzw. ungerade ist.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

#### Theorie

Gegeben ist eine Funktion  $f$ :

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad (D \subset \mathbb{R})$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Def.: Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $I \subset D$  **monoton wachsend**, falls für alle  $x_1 \in I$  und  $x_2 \in I$  gilt:  
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $I \subset D$  **streng monoton wachsend**, falls für alle  $x_1 \in I$  und  $x_2 \in I$  gilt:  
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .

Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $I \subset D$  **monoton fallend**, falls für alle  $x_1 \in I$  und  $x_2 \in I$  gilt:  
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .

Die Funktion  $f$  ist im Intervall  $I \subset D$  **streng monoton fallend**, falls für alle  $x_1 \in I$  und  $x_2 \in I$  gilt:  
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Die Funktion  $f$  ist **gerade**, falls  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in D$ .

Die Funktion  $f$  ist **ungerade**, falls  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in D$ .

#### Aufgaben

- Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion  $f$ , die in einem Intervall  $I$  ...
  - ... monoton wachsend ist.
  - ... streng monoton wachsend ist.
  - ... monoton fallend ist.
  - ... streng monoton fallend ist.
- Geben Sie alle Intervalle an, auf welchen die Funktion  $f$  ...
  - ... streng monoton wachsend ist.
  - ... streng monoton fallend ist.
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = f(x) = (x - 4)^2$
  - $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = g(x) = x^3 - x$
  - $h: \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \wedge k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = h(x) = -\tan(x)$
- Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion  $f$ , welche ...

- a) ... gerade ist.
  - b) ... ungerade ist.
4. Beurteilen Sie, ob die folgenden Funktionen ...
- i) ... gerade sind.
  - ii) ... ungerade sind.
- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = f(x) = 3x^2$
  - b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = g(x) = x \cdot \sin(x)$
  - c)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = h(x) = x(x - 2)$
  - d)  $p: \mathbb{R} \setminus \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \wedge k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = p(x) = x^2 \cdot \tan(x)$
5. Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion  $f$ , welche sowohl gerade als auch ungerade ist.

## Thema 4: Periodizität

### Lernziele

- wissen und verstehen, was es heisst, eine Funktion sei periodisch.
- beurteilen können, ob eine Funktion periodisch ist oder nicht.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

### Theorie

Gegeben ist eine Funktion  $f$ :

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad (D \subset \mathbb{R})$$
$$x \rightarrow y = f(x)$$

Def.: Die Funktion  $f$  ist **periodisch** mit Periode  $p$ , falls  $f(x \pm p) = f(x)$  für alle  $x \in D$ .

### Aufgaben

1. Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion  $f$ , welche periodisch ist.
2. Beweisen Sie: Wenn  $p$  eine Periode einer Funktion  $f$  ist, dann ist  $k \cdot p$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) auch eine Periode von  $f$ .
3. Geben Sie die kleinstmögliche Periode  $p$  der folgenden periodischen Funktionen an:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = f(x) = \cos(x)$

b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = g(x) = -\sin(2x)$

c)  $q: \mathbb{R} \setminus \{x: x = 2\pi + k \cdot 4\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = q(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$

d)  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = r(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ x - 2 & (1 \leq x < 2) \end{cases} \quad \text{und} \quad r(x + 2) = r(x)$

d)  $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y = s(x) = \begin{cases} \cos(x) & \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \left(\frac{\pi}{2} \leq x < \pi\right) \end{cases} \quad \text{und} \quad s(x + \pi) = s(x)$