Aufgaben 2 Grenzwert
Grenzwert einer reellen Zahlenfolge, Grenzwert einer Funktion

Lernziele

- aus dem Bildungsgesetz einer reellen Zahlenfolge die einzelnen Folgenglieder bestimmen können.
- das Bildungsgesetz einfacherer reeller Zahlenfolgen bestimmen können.
- beurteilen können, ob eine einfachere reelle Zahlenfolge konvergent oder divergent ist.
- den Grenzwert einer einfacheren konvergenten reellen Zahlenfolge bestimmen können.
- verstehen, was der Grenzwert einer Funktion ist.
- verstehen, was der links- bzw. rechtsseitige Grenzwert einer Funktion ist.
- die symbolische Schreibweise für den Grenzwert einer Funktion kennen und korrekt anwenden können.
- einfachere Grenzwerte von Funktionen bestimmen können.
- die Grenzwertsätze anwenden können.

Aufgaben

2.1 Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ aus ihrem Bildungsgesetz:

a) $a_n = \frac{n^n}{n!}$ b) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n!}{n^n}$

Bemerkung:
- Mit n! ($n \in \mathbb{N}$) wird die Fakultät von n bezeichnet: $n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
Bsp.: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2.2 Finden Sie das Bildungsgesetz der folgenden Zahlenfolgen:

a) $\langle a_n \rangle = 1 , \frac{3}{2} , \frac{5}{3} , \frac{7}{4} , \frac{9}{5} , \ldots$ b) $\langle a_n \rangle = \frac{2}{5} , \frac{3}{8} , \frac{4}{11} , \frac{5}{14} , \frac{6}{17} , \ldots$

c) $\langle a_n \rangle = 0 , \frac{3}{4} , \frac{4}{3} , \frac{15}{8} , \frac{12}{5} , \frac{35}{12} , \frac{24}{7} , \ldots$ d) $\langle a_n \rangle = 1 , 1 , \frac{7}{5} , \frac{15}{7} , \frac{31}{9} , \frac{63}{11} , \frac{127}{13} , \ldots$

2.3 Gegeben ist die konvergente reelle Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ und die positive Zahl ε.

Bestimmen Sie …

i) … den Grenzwert g der Folge.

ii) … die kleinste natürliche Zahl n_0, so dass $|a_n - g| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$.

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\varepsilon = 0.01$ b) $a_n = \frac{3}{n+2}$ $\varepsilon = 0.1$

c) $a_n = \frac{2n+1}{4n}$ $\varepsilon = 0.01$ d) $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$ $\varepsilon = 0.01$

e) $a_n = \frac{4n}{2n^2 + 9n}$ $\varepsilon = 0.1$ f) $a_n = \frac{4n}{2n - 1}$ $\varepsilon = 0.01$

g) $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$ $\varepsilon = 0.01$

2.4 Beurteilen Sie, ob die folgenden reellen Zahlenfolgen konvergent oder divergent sind.

Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert g.
Beurteilen Sie im Falle der Divergenz, ob die Zahlenfolge gegen ∞ oder -∞ strebt.

a) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{(1-2n)^3}{1+n^3} \right\rangle$ b) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n^2 - n}{n^2 + n - 1} \right\rangle$

c) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{2n^2 - 3}{4n} \right\rangle$ d) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3^n}{n^2} \right\rangle$

e) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{3^n - 3^{n-1}}{2 + 3^n} \right\rangle$ f) $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{6n - n^2}{5n - 4} \right\rangle$

g) $\langle a_n \rangle = 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, \ldots$

h) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$

i) $\langle a_n \rangle = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{2}{3}, \frac{9}{11}, \frac{5}{7}, \frac{11}{13}, \ldots$

j) $\langle a_n \rangle = 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{5}, \frac{6}{5}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$

2.5 Skizzieren Sie den Grafen einer Funktion f, welche die folgenden Eigenschaften i) bis v) besitzt:

i) $f(x_1)$ existiert — $\lim\limits_{x \to x_1} f(x)$ existiert — $f(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$

ii) $f(x_2)$ existiert — $\lim\limits_{x \to x_2} f(x)$ existiert — $f(x_2) \neq \lim\limits_{x \to x_2} f(x)$

iii) $f(x_3)$ existiert — $\lim\limits_{x \to x_3} f(x)$ existiert nicht

iv) $f(x_4)$ existiert nicht — $\lim\limits_{x \to x_4} f(x)$ existiert

v) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ existiert

2.6 Gegeben sind die folgenden beiden Funktionen f_1 und f_2:

f_1: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = f_1(x) = 3x$ f_2: $\mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, x \to y = f_2(x) = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$

a) Skizzieren Sie die Grafen der beiden Funktionen f_1 und f_2.

b) Beurteilen Sie für beide Funktionen f_1 und f_2, ob an der Stelle $x = 2$ ...

i) ... die Funktion definiert ist.

ii) ... der Grenzwert der Funktion existiert.

2.7 Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgenden Aussagen über den Grenzwert einer Funktion wahr oder falsch sind:

a) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0."

b) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 exisiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert."

c) "Wenn an einer Stelle x_0 sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide gleich gross sind, dann existiert der Grenzwert an dieser Stelle x_0."

d) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 nicht existiert, dann existiert an dieser Stelle x_0 entweder der linksseitige oder der rechtsseitige Grenzwert nicht."

e) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist er gleich gross wie der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle x_0."

f) "Wenn die Funktion an der Stelle x_0 definiert ist, dann existiert an dieser Stelle x_0 der Grenzwert."

g) "Wenn der Grenzwert an einer Stelle x_0 existiert, dann ist die Funktion an dieser Stelle x_0 definiert."

2.8 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{2x + 3}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 5/2} \frac{5 - 2x}{2x^2 - 3x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 3x + 2}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a + x)^2 - a^2}{x}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{a + x} - \frac{1}{a}}{x}$

Lösungen

2.1 a) $\langle a_n \rangle = 1\ , 2\ , \frac{9}{2} , \frac{32}{3} , \frac{625}{24} , \ldots$

b) $\langle a_n \rangle = 1\ , -\frac{1}{2} , \frac{2}{9} , -\frac{3}{32} , \frac{24}{625} , \ldots$

2.2 a) $a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

b) $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$

c) $a_n = \frac{n^2-1}{2n}$

d) $a_n = \frac{2^n-1}{2n-1}$

2.3	a)	i)	$g = 0$	ii)	$n_0 = 10'001$
	b)	i)	$g = 0$	ii)	$n_0 = 29$
	c)	i)	$g = \frac{1}{2}$	ii)	$n_0 = 26$
	d)	i)	$g = 0$	ii)	$n_0 = 51$
	e)	i)	$g = 0$	ii)	$n_0 = 16$
	f)	i)	$g = 2$	ii)	$n_0 = 101$
	g)	i)	$g = 1$	ii)	$n_0 = 10$

2.4	a)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = -8$
	b)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = 2$
	c)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \to \infty\ \ (n \to \infty)$
	d)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \to \infty\ \ (n \to \infty)$
	e)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = \frac{2}{3}$
	f)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \to -\infty\ \ (n \to \infty)$
	g)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \not\to \infty\ \ (n \to \infty),\ a_n \not\to -\infty\ \ (n \to \infty)$
	h)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = 0$
	i)	$\langle a_n \rangle$ konvergent	$g = 1$
	j)	$\langle a_n \rangle$ divergent	$a_n \not\to \infty\ \ (n \to \infty),\ a_n \not\to -\infty\ \ (n \to \infty)$

2.5 ...

2.6 a) ...

b) f_1 ist an der Stelle $x = 2$ definiert und hat dort den Funktionswert $f_1(2) = 6$.
Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert: $\lim\limits_{x \to 2} f_1(x) = 6$

f_2 ist an der Stelle $x = 2$ nicht definiert.
Der Grenzwert für $x \to 2$ existiert jedoch: $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x) = 6$

2.7 a) falsch

b) wahr

c) wahr

d) falsch

e) wahr

f) falsch

g) falsch

2.8 a) $\frac{1}{2}$

b) 0

c) $-\frac{2}{7}$

d) 6

e) 2a

f) $-\frac{1}{a^2}$