

Aufgaben 17 **Bestimmtes Integral** **Bestimmtes Integral, Fläche unter einer Kurve, Konsumenten-/** **Produzentenrente**

Lernziele

- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden können.
- ein bestimmtes Integral einer konstanten Funktion, einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- den Flächeninhalt zwischen dem Grafen einer elementaren Potenzfunktion und der Abszissenachse bestimmen können.
- eine Konsumenten- und Produzentenrente bestimmen können, wenn die Nachfrage- und Angebotsfunktion elementare Potenzfunktionen sind.

Aufgaben

17.1 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_3^4 (2x - 5) dx$	b) $\int_0^1 (x^3 + 2x) dx$	c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{x^2}{2} - 4\right) dx$
d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x - 4\right) dx$	e) $\int_{-2}^2 \left(2x^2 - \frac{x^4}{8}\right) dx$	f) $\int_{-1}^1 e^x dx$
g) $\int_0^1 e^{2x} dx$	h) $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx$	

17.2 Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Grafen der Funktion f und der x -Achse im Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x -Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$.

a) $f(x) = -x^2 + 1$	b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$
----------------------	----------------------------

17.3 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist $p = f(x) = 100 - 4x^2$.
Wie gross ist die Konsumentenrente, falls die Gleichgewichtsmenge 4 Einheiten sind?

17.4 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist $p = f(x) = 34 - x^2$.
Wie gross ist die Konsumentenrente, falls der Gleichgewichtspreis 9 CHF beträgt?

17.5 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein bestimmtes Produkt ist
 $p = f(x) = 81 - x^2$
und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist
 $p = g(x) = x^2 + 4x + 11$.
Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht und die Konsumentenrente dort.

17.6 Angenommen, die Angebotsfunktion (Preis in CHF) für eine Ware ist $p = g(x) = 4x^2 + 2x + 2$.
Wie gross ist die Produzentenrente, falls der Gleichgewichtspreis 422 CHF beträgt?

17.7 Bestimmen Sie die Produzentenrente für ein Produkt, falls seine Nachfragefunktion (Preis in CHF)
 $p = f(x) = 81 - x^2$
ist und seine Angebotsfunktion (Preis in CHF)
 $p = g(x) = x^2 + 4x + 11$

17.8 (siehe nächste Seite)

- 17.8 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein bestimmtes Produkt ist
 $p = f(x) = 144 - 2x^2$
und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist
 $p = g(x) = x^2 + 33x + 48$

Bestimmen Sie die Produzentenrente bei Marktgleichgewicht.

- 17.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr..

- a) Das bestimmte Integral einer Funktion ist ...

- ... eine reelle Zahl.
 ... eine Funktion.
 ... eine Menge von Funktionen.
 ... ein Graf.

- b) $\int_a^b f(x) dx$...

- ... = $F(a) - F(b)$ wobei F eine Stammfunktion von f ist.
 ... ist gleich dem Flächeninhalt zwischen dem Grafen von f und der x -Achse im Intervall $[a,b]$, falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$
 ... = 0 nur falls $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$
 ... kann nicht berechnet werden, wenn nicht alle Stammfunktionen von f bekannt sind.

- c) Die Konsumentenrente ist ein Flächeninhalt zwischen ...

- ... den Grafen von Nachfrage- und Angebotsfunktion.
 ... der x -Achse und dem Grafen der Nachfragefunktion.
 ... dem Grafen der Nachfragefunktion und der horizontalen Linie "Preis = Gleichgewichtspreis".
 ... der horizontalen Linie "Preis = Gleichgewichtspreis" und dem Grafen der Angebotsfunktion.

Lösungen

17.1 a) $\int_3^4 (2x - 5) dx = [x^2 - 5x]_3^4 = (4^2 - 5 \cdot 4) - (3^2 - 5 \cdot 3) = 2$

b) $\int_0^1 (x^3 + 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{1^4}{4} + 1^2 \right) - \left(\frac{0^4}{4} + 0^2 \right) = \frac{5}{4}$

c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{x^2}{2} - 4 \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - 4x \right]_{-5}^{-3} = \left(\frac{(-3)^3}{6} - 4 \cdot (-3) \right) - \left(\frac{(-5)^3}{6} - 4 \cdot (-5) \right) = \frac{25}{3}$

d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x - 4 \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 4x \right]_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{4^3}{6} + \frac{3 \cdot 4^2}{2} - 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{6} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 4 \cdot 2 \right) = \frac{182}{3}$

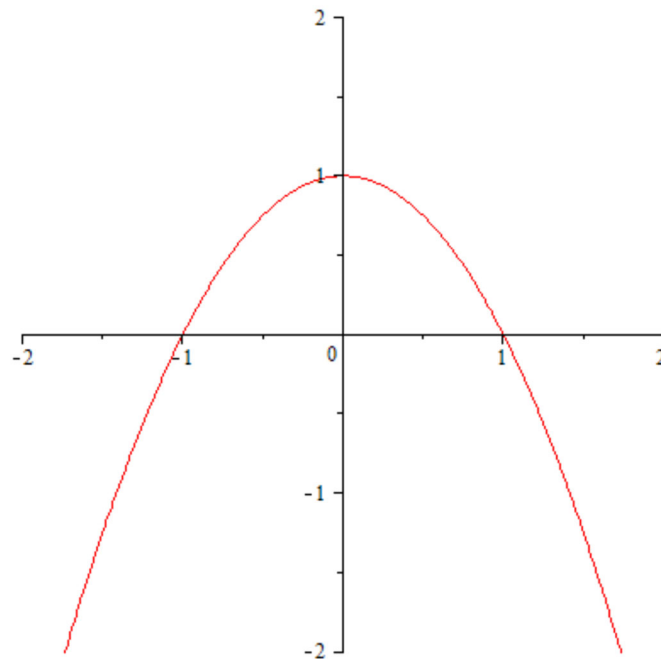
e) $\int_{-2}^2 \left(2x^2 - \frac{x^4}{8} \right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{40} \right]_{-2}^2 = \left(\frac{2 \cdot 2^3}{3} - \frac{2^5}{40} \right) - \left(\frac{2 \cdot (-2)^3}{3} - \frac{(-2)^5}{40} \right) = \frac{136}{15}$

f) $\int_{-1}^1 e^x dx = [e^x]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$

g) $\int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$

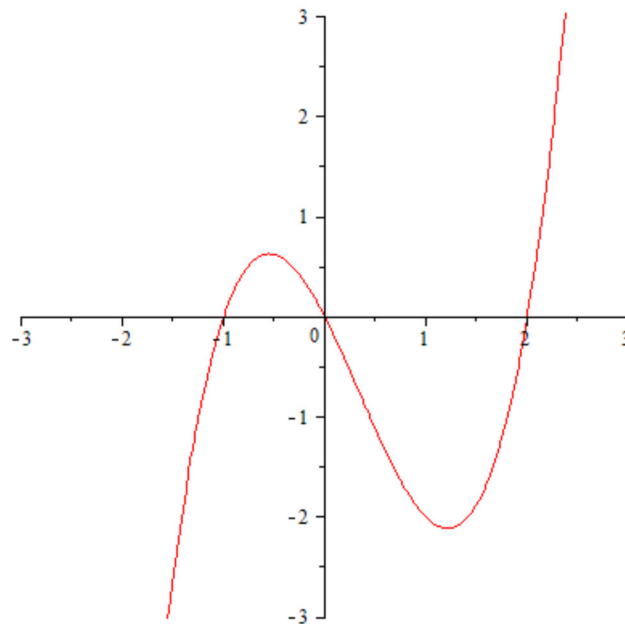
h) $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} (e^{-3} - e^3) = \frac{1}{3} \left(e^3 - \frac{1}{e^3} \right)$

17.2 a) $A = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$



b) (siehe nächste Seite)

b)
$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{5}{12}$$



Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Stellen x , wo der Graf von f die x -Achse schneidet, d.h. wo $f(x) = 0$
- Bestimmen Sie dann das Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x -Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$

17.3 Konsumentenrente CS = 170.67 CHF (gerundet)

17.4 Konsumentenrente CS = 83.33 CHF (gerundet)

17.5 Gleichgewichtsmenge $x = 5$
Gleichgewichtspreis $p = 56$ CHF
Konsumentenrente CS = 83.33 CHF (gerundet)

17.6 Produzentenrente PS = 2766.67 CHF (gerundet)

17.7 Produzentenrente PS = 133.33 CHF (gerundet)

17.8 Produzentenrente PS = 103.34 CHF (gerundet)

- 17.9 a) 1. Aussage
b) 2. Aussage
c) 3. Aussage