Aufgaben 16 Unbestimmtes Integral
Stammfunktion, Unbestimmtes Integral, Faktor-/Summenregel

Lernziele

- eine Stammfunktion und das unbestimmte Integral einer konstanten Funktion, einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- die Faktor- und Summenregel anwenden können, um das unbestimmte Integral einer Funktion bestimmen zu können.
- die Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können, wenn die Grenzkosten-, Grenzertrags- und die Grenzgewinnfunktion bekannt ist.

Aufgaben

16.1 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int x^2\,dx$ b) $\int x^3\,dx$

c) $\int x^{-5}\,dx$ d) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

e) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$ f) $\int 4\,dx$

g) $\int (-7)\,dx$ h) $\int e^x\,dx$

i) $\int e^{3x}\,dx$ j) $\int e^{-x}\,dx$

16.2 Bestimmen Sie das unbestimmte Integral der folgenden Funktionen f:

a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = 3x^2$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 – 5$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x – 5$ f) $f(x) = x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x$

16.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen zweier Stammfunktionen F_1 und F_2 von f, so dass die genannten Bedingungen erfüllt sind.

a) $f(x) = 10x^2 + x$ $F_1(0) = 3$ $F_2(0) = -1$

b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ $F_1(2) = 5$ $F_2(4) = -8$

16.4 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der Ableitung f ' einer Funktion f:

$$f'(x) = 3x^2 - 50x + 250$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, falls …

a) … $f(0) = 500$.

b) … $f(10) = 2500$.

16.5 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung f '' einer Funktion f:

$$f''(x) = 2x - 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der …

a) … ersten Ableitung f ', so dass $f'(2) = 4$.

b) … Funktion f, so dass $f'(2) = 4$ und $f(1) = -1$.

16.6 Angenommen, die monatlichen Grenzkosten (in CHF) für ein Produkt sind $K'(x) = 2x + 100$, und die Fixkosten betragen 200 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion für einen Monat.

16.7 Angenommen, die Grenzkosten (in CHF) für ein Produkt sind $K'(x) = 4x + 2$, und die Produktion von 10 Einheiten ergeben Gesamtkosten von 300 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion.

16.8 Angenommen, die Grenzkosten (in CHF) für ein Produkt sind $K'(x) = 4x + 40$, und die Gesamtkosten für die Produktion von 25 Einheiten betragen 3000 CHF. Wie hoch sind die Gesamtkosten für die Produktion von 30 Einheiten?

16.9 Eine Firma weiss, dass die Grenzkosten für ein Produkt $K'(x) = 3x + 20$ sind und dass der Grenzertrag $E'(x) = 44 - 5x$ ist. Die Gesamtkosten für die Produktion und den Verkauf von 10 Einheiten betragen 370 CHF.

a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$.

b) Wie viele Einheiten führen zu einem maximalen Gewinn?

Hinweis:
- Der Ertrag ist null, falls keine Einheit verkauft wird, also $E(0) = 0$ CHF.

16.10 Angenommen, der Grenzertrag $E'(x)$ und die Ableitung der Durchschnittskosten $\overline{K}'(x)$ lauten wie folgt:

$$E'(x) = 300$$
$$\overline{K}'(x) = 2 - \frac{1800}{x^2}$$

Aus der Produktion von 10 Einheiten resultieren Gesamtkosten von 3000 CHF.

a) Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x)$.

b) Wie viele Einheiten führen zu einem maximalen Gewinn? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

16.11 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Eine Stammfunktion einer Funktion ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Menge von Funktionen.
- ☐ ... ein Graf.

b) Das unbestimmte Integral einer Funktion ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Menge von Funktionen.
- ☐ ... ein Graf.

c) Falls $f = g'$, dann ist ...

- ☐ ... f eine Stammfunktion von g.
- ☐ ... g eine Stammfunktion von f.
- ☐ ... f das unbestimmte Integral von g.
- ☐ ... g das unbestimmte Integral von f.

Lösungen

16.1 a) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ b) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

c) $\int x^{-5}\,dx = -\frac{1}{4x^4} + C$ d) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

e) $\int \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3x^3} + C$ f) $\int 4\,dx = 4x + C$

g) $\int (-7)\,dx = -7x + C$ h) $\int e^x\,dx = e^x + C$

i) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ j) $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$

16.2 a) $\int f(x)\,dx = \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

b) $\int f(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = x^3 + C$

c) $\int f(x)\,dx = \int (x^3 + 2x^2 - 5)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 5x + C$

d) $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}\right)dx = \frac{x^6}{12} + \frac{2}{3x} + C$

e) $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5\right)dx = \frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 5x + C$

f) $\int f(x)\,dx = \int \left(x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x\right)dx = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{2} + C$

16.3 a) $F_1(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3$ $F_2(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$

b) $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x - 7$ $F_2(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x - 100$

Hinweise:
- Bestimmen Sie zuerst das unbestimmte Integral von f.
- Bestimmen Sie dann den Wert der Integrationskonstante, so dass die genannten Bedingungen erfüllt sind.

16.4 a) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 500$

b) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1500$

16.5 a) $f'(x) = x^2 - x + 2$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{17}{6}$

16.6 $K(x) = x^2 + 100x + 200$

Hinweise:
- Integrieren Sie zuerst die Grenzkostenfunktion $K'(x) \Rightarrow K(x) = x^2 + 100x + C$ ($C \in \mathbb{R}$)
- Bestimmen Sie die Integrationskonstante, indem Sie die Bedingung $K(0) = 200$ CHF berücksichtigen $\Rightarrow C = 200$

16.7 $K(x) = 2x^2 + 2x + 80$

16.8 $K(30) = 3750$ CHF

Hinweis:
- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = 2x^2 + 40x + 750$.

16.9 a) $G(x) = -4x^2 + 24x - 20$

Hinweise:
- Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion K(x) und die Ertragsfunktion E(x)
  $\Rightarrow K(x) = \frac{3}{2}x^2 + 20x + 20$, $E(x) = 44x - \frac{5}{2}x^2$
- Bestimmen Sie dann die Gewinnfunktion G(x).

b) $x = 3$

Hinweise:
- Bestimmen Sie das relative Maximum der Gewinnfunktion G(x).
- Prüfen Sie nach, ob das relative Maximum das absolute Maximum ist.

16.10 a) $K(x) = 2x^2 + 100x + 1800$

Hinweise:
- Bestimmen Sie zuerst die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}(x) \Rightarrow \overline{K}(x) = 2x + \frac{1800}{x} + C_1$
- Bestimmen Sie dann die Kostenfunktion K(x).

b) G = 3200 CHF ist der absolute maximale Gewinn bei x = 50 Einheiten.

Hinweise:
- Bestimmen Sie zuerst die Ertragsfunktion E(x) $\Rightarrow E(x) = 300x$
- Bestimmen Sie dann die Gewinnfunktion G(x) $\Rightarrow G(x) = -2x^2 + 200x - 1800$
- Bestimmen Sie das relative Maximum der Gewinnfunktion G(x).
- Prüfen Sie nach, ob das relative Maximum das absolute Maximum ist.

16.11 a) 2. Aussage

b) 3. Aussage

c) 2. Aussage