

Aufgaben 11 Exponentialfunktion und -gleichungen Zinseszins, Unterjährige Verzinsung

Lernziele

- das zukünftige Kapital berechnen können, welches bei unterjähriger Verzinsung angelegt ist.
- wissen und verstehen, was ein nomineller und ein effektiver Jahreszinssatz ist.
- ausgewählte Zinseszinsaufgaben bearbeiten können.

Aufgaben

11.1 Ein Anfangskapital $K_0 = 1000$ CHF wird zu einem nominellen Jahreszinssatz $i_a = 10\%$ angelegt, wobei die Verzinsung ...

- a) ... vierteljährlich erfolgt.
 - i) Bestimmen Sie den vierteljährlichen Zinssatz.
 - ii) Bestimmen Sie das Kapital K_1 , K_2 und K_3 nach einem, zwei und drei Jahr(en).
 - iii) Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz i_a^* .
- b) ... monatlich erfolgt.
 - i) Bestimmen Sie den monatlichen Zinssatz.
 - ii) Bestimmen Sie das Kapital K_1 , K_2 und K_3 nach einem, zwei und drei Jahr(en).
 - iii) Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz i_a^* .

11.2 Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz für einen nominalen Jahreszinssatz von 6% und einer ...

- a) ... jährlichen Verzinsung.
- b) ... halbjährlichen Verzinsung.
- c) ... vierteljährlichen Verzinsung.
- d) ... monatlichen Verzinsung.
- e) ... täglichen Verzinsung (1 Jahr = 360 Tage).

11.3 Was ist der zukünftige Wert, wenn 3200 CHF 5 Jahre lang zu 8% bei vierteljährlicher Verzinsung angelegt werden?

11.4 Bestimmen Sie den Zins, den 10'000 CHF tragen, wenn das Geld 3 Jahre lang zu 9% bei monatlicher Verzinsung angelegt werden.

11.5 Die Formel

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$$

wird verwendet, um das zukünftige Kapital K_n bei unterjähriger Verzinsung zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach K_0 , i_a und n .

11.6 Welchen Geldbetrag müssen Eltern auf ein Konto einzahlen, welches bei nominell 10% monatlich verzinst wird, damit das Geld für die Ausbildung ihres Sohnes in 18 Jahren auf 40'000 CHF anwächst?

- 11.7 Ein Anfangskapital von 1000 CHF steigt auf 1500 CHF an, wenn es 10 Jahre lang zu einem unbekanntem Jahreszinssatz und vierteljährlicher Verzinsung angelegt wird.
Bestimmen Sie den ...
- a) ... nominellen Jahreszinssatz.
 - b) ... effektiven Jahreszinssatz.
- 11.8 Wie lange (in Monaten) müsste ein Kapital bei 6% und monatlicher Verzinsung angelegt werden, um seinen Wert zu verdoppeln?
- 11.9 Frau Good möchte 100'000 CHF investieren. Ihre Bank unterbreitet ihr zwei Angebote:
- A effektiver Jahreszinssatz von 8.5%
 - B nomineller Jahreszinssatz von 8%, monatliche Verzinsung
- Welches Angebot ist besser, Angebot A oder Angebot B?
- 11.10 Wie lange (in Jahren) müssten 1000 CHF zu 2.5% bei täglicher Verzinsung angelegt werden, um einen Zins von 250 CHF zu erzielen?
- 11.11 Zu welchem nominellen Jahreszinssatz müssten 20'000 CHF angelegt werden, um bei vierteljährlicher Verzinsung nach 7 Jahren 26'400 CHF zu erzielen?
- 11.12 Ein Paar benötigt 150'000 CHF für eine erste Anzahlung an ihr Eigenheim. Angenommen, sie investieren die 100'000 CHF, die sie jetzt haben, zu 8% bei vierteljährlicher Verzinsung. Wie lange würde es dauern, bis das Geld auf 150'000 CHF angewachsen ist?
- 11.13 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) Der nominale Jahreszinssatz ...
 - ... ist allgemein höher als der effektive Jahreszinssatz.
 - ... ist gleich hoch wie der effektive Jahreszinssatz, falls die Verzinsung jährlich erfolgt.
 - ... ist halb so hoch wie der effektive Jahreszinssatz, falls die Verzinsung halbjährlich erfolgt.
 - ... hängt von der Zinsperiode ab.
 - b) Bei einer Anlage mit Zinseszins und m ($m > 1$) Zinsperioden pro Jahr ...
 - ... ist der Wachstumsfaktor m mal höher als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
 - ... ist der effektive Jahreszinssatz m mal tiefer als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
 - ... wächst das Kapital schneller als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
 - ... wächst das Kapital langsamer als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
 - c) Wenn ein Anfangskapital von 1000 CHF bei halbjährlicher Verzinsung in einem Jahr auf 1100 CHF anwächst, dann ist der ...
 - ... effektive Jahreszins tiefer als 10%.
 - ... effektive Jahreszins höher als 10%.
 - ... nominale Jahreszins tiefer als 10%.
 - ... nominale Jahreszins höher als 10%.

Lösungen

- 11.1 a) i) $i = \frac{i_a}{m} = \frac{10\%}{4} = 2.5\%$
- ii) $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$ mit $m = 4$, $n = \text{Anzahl Quartale}$
- nach 1 Jahr: $n = 4$
 $K_4 = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^4 \text{ CHF} = 1103.81 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 2 Jahren: $n = 8$
 $K_8 = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^8 \text{ CHF} = 1218.40 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 3 Jahren: $n = 12$
 $K_{12} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^{12} \text{ CHF} = 1344.89 \text{ CHF (gerundet)}$
- iii) $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^4 - 1 = 0.1038 = 10.38\% \text{ (gerundet)}$
- b) i) $i = \frac{i_a}{m} = \frac{10\%}{12} = 0.83\% \text{ (gerundet)}$
- ii) $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$ mit $m = 12$, $n = \text{Anzahl Monate}$
- nach 1 Jahr: $n = 12$
 $K_{12} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{12} \text{ CHF} = 1104.71 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 2 Jahren: $n = 24$
 $K_{24} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{24} \text{ CHF} = 1220.39 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 3 Jahren: $n = 36$
 $K_{36} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{36} \text{ CHF} = 1348.18 \text{ CHF (gerundet)}$
- iii) $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{12} - 1 = 0.1047 = 10.47\% \text{ (gerundet)}$

- 11.2 $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1$ $i_a = 6\%$
- a) $m = 1$ $i_a^* = 6\%$
- b) $m = 2$ $i_a^* = 6.09\%$
- c) $m = 4$ $i_a^* = 6.136\% \text{ (gerundet)}$
- d) $m = 12$ $i_a^* = 6.168\% \text{ (gerundet)}$
- e) $m = 360$ $i_a^* = 6.183\% \text{ (gerundet)}$

11.3 $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$ mit $K_0 = 3200 \text{ CHF}$, $i_a = 8\%$, $m = 4$, $n = 5 \cdot 4 = 20$
 $\Rightarrow K_{20} = 4755.03 \text{ CHF (gerundet)}$

11.4 Zins = $K_n - K_0$
 $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$ mit $K_0 = 10'000 \text{ CHF}$, $i_a = 9\%$, $m = 12$, $n = 3 \cdot 12 = 36$
 $\Rightarrow K_{36} - K_0 = 3086.45 \text{ CHF (gerundet)}$

11.5 siehe [Formelsammlung](#)

11.6 $K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n}$ mit $K_n = 40'000$ CHF, $i_a = 10\%$, $m = 12$, $n = 18 \cdot 12 = 216$
 $\Rightarrow K_0 = 6661.46$ CHF (gerundet)

11.7 a) $i_a = m \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$ mit $K_0 = 1000$ CHF, $K_n = 1500$ CHF, $m = 4$, $n = 10 \cdot 4 = 40$
 $\Rightarrow i_a = 4.08\%$ (gerundet)
b) $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1$
 $\Rightarrow i_a^* = 4.14\%$ (gerundet)

11.8 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)}$ mit $\frac{K_n}{K_0} = 2$, $i_a = 6\%$, $m = 12$
 $\Rightarrow n = 138.98... \rightarrow 139$ Monate

11.9 A $i_a^*(A) = 8.5\%$
B $i_a^*(B) = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1$ mit $i_a = 8\%$, $m = 12$
 $\Rightarrow i_a^*(B) = 8.3\%$
 $\Rightarrow i_a^*(A) > i_a^*(B)$, d.h. Angebot A ist besser als Angebot B

11.10 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)}$ mit $K_0 = 1000$ CHF, $K_n = 1250$ CHF, $i_a = 2.5\%$, $m = 360$
 $\Rightarrow n = 8.92... \rightarrow 9$ Jahre

11.11 $i_a = m \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$ mit $K_0 = 20'000$ CHF, $K_n = 26'400$ CHF, $m = 4$, $n = 7 \cdot 4 = 28$
 $\Rightarrow i_a = 4.0\%$ (gerundet)

11.12 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)}$ mit $K_0 = 100'000$ CHF, $K_n = 150'000$ CHF, $i_a = 8\%$, $m = 4$
 $\Rightarrow n = 20.47... \rightarrow 21$ Quartale = 5 Jahre 3 Monate

- 11.13 a) 2. Aussage
b) 3. Aussage
c) 3. Aussage