

# Unbestimmtes Integral

Bsp.: Finanzmathematik

Gegeben ist die Grenzkostenfunktion  $K'$  für die Produktion einer Ware oder die Erbringung einer Dienstleistung:

$$K'(x) = (3x + 50) \text{ CHF}$$

Wie lautet die Gesamtkostenfunktion  $K$ ?

$$K(x) = \dots ?$$

## Allgemeine Problemstellung

Gegeben ist eine Funktion  $f$ . Welche Funktion  $F$  ist so, dass  $F' = f$ ?

Bsp.: 1.  $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & F_1(x) = x^2 && \text{da } F_1'(x) = 2x = f(x) \\ & F_2(x) = x^2 + 1 && \text{da } F_2'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \\ & F_3(x) = x^2 - 4 && \text{da } F_3'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \\ & \dots && \\ & F(x) = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}) && \text{da } F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \end{aligned}$$

Dies sind bereits alle Funktionen  $F$  mit  $F' = f$ . Es gibt keine weiteren Funktionen  $F$  mit anderen Gleichungen als  $F(x) = x^2 + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ).

2.  $f(x) = 8x^3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & F_1(x) = 2x^4 && \text{da } F_1'(x) = 8x^3 = f(x) \\ & F_2(x) = 2x^4 + 5 && \text{da } F_2'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \\ & F_3(x) = 2x^4 - 11 && \text{da } F_3'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \\ & \dots && \\ & F(x) = 2x^4 + C \quad (C \in \mathbb{R}) && \text{da } F'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \end{aligned}$$

## Definitionen

$F$  heisst **Stammfunktion** von  $f$ , falls ihre Ableitung  $F'$  gleich  $f$  ist, d.h.  $F'(x) = f(x)$ .

Die Menge aller Stammfunktionen der Funktion  $f$  heisst **unbestimmtes Integral** von  $f$ , bezeichnet mit  $\int f(x) dx$ .

Bsp.: 1.  $f(x) = 8x^3$

Alle Stammfunktionen  $F$  haben die Form  $F(x) = 2x^4 + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ).  
Wir schreiben daher  $\int f(x) dx = \int 8x^3 dx = 2x^4 + C$

2.  $f(x) = 12x^2$   
 $\int f(x) dx = \int 12x^2 dx = 4x^3 + C$

3.  $\int 2x dx = x^2 + C$

4.  $\int 3 e^{3x} dx = e^{3x} + C$

$C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) heisst **Integrationskonstante**.