

Aufgaben 14 Unbestimmtes Integral Stammfunktion, Unbestimmtes Integral, Faktor-/Summenregel

Lernziele

- eine Stammfunktion und das unbestimmte Integral einer konstanten Funktion, einer elementaren Potenzfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- die Faktor- und Summenregel anwenden können, um das unbestimmte Integral einer Funktion bestimmen zu können.
- die Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können, wenn die Grenzkosten-, Grenzertrags- und die Grenzgewinnfunktion bekannt ist.

Aufgaben

14.1 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $\int x^2 dx$ | b) $\int x^3 dx$ |
| c) $\int x^{-5} dx$ | d) $\int \frac{1}{x^2} dx$ |
| e) $\int \frac{1}{x^4} dx$ | f) $\int 4 dx$ |
| g) $\int (-7) dx$ | h) $\int e^x dx$ |
| i) $\int e^{3x} dx$ | j) $\int e^{-x} dx$ |

14.2 Bestimmen Sie das unbestimmte Integral der folgenden Funktionen f:

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = x^5$ | b) $f(x) = 3x^2$ |
| c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ | d) $f(x) = \frac{x^5}{2} - \frac{2}{3x^2}$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ | f) $f(x) = x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x$ |

14.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen jener beiden Stammfunktionen F_1 und F_2 von f , welche die genannten Bedingungen erfüllen.

- | | | |
|--------------------------|--------------|---------------|
| a) $f(x) = 10x^2 + x$ | $F_1(0) = 3$ | $F_2(0) = -1$ |
| b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ | $F_1(2) = 5$ | $F_2(4) = -8$ |

14.4 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der Ableitung f' einer Funktion f:

$$f'(x) = 3x^2 - 50x + 250$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, falls ...

- | |
|-------------------------|
| a) ... $f(0) = 500$. |
| b) ... $f(10) = 2500$. |

14.5 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f:

$$f''(x) = 2x - 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, so dass $f'(2) = 4$ und $f(1) = -1$.

14.6 Angenommen, die monatlichen Grenzkosten für ein Produkt oder eine Dienstleistung sind $K'(x) = (2x + 100)$ CHF, und die Fixkosten betragen 200 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion für einen Monat.

- 14.7 Angenommen, die Grenzkosten für ein Produkt oder eine Dienstleistung sind $K'(x) = (4x + 2)$ CHF, und die Produktion oder Erbringung von 10 Einheiten ergeben Gesamtkosten von 300 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion.
- 14.8 Angenommen, die Grenzkosten für ein Produkt oder eine Dienstleistung sind $K'(x) = (4x + 40)$ CHF, und die Gesamtkosten für die Produktion oder Erbringung von 25 Einheiten betragen 3000 CHF. Wie hoch sind die Gesamtkosten für 30 Einheiten?
- 14.9 Eine Firma weiss, dass die Grenzkosten für eine Dienstleistung $K'(x) = (3x + 20)$ CHF sind und dass der Grenzertrag $E'(x) = (-5x + 44)$ CHF ist. Die Gesamtkosten für die Erbringung von 10 Einheiten betragen 370 CHF.
- Bestimmen Sie ...
- a) ... die Gewinnfunktion $G(x)$.
- b) ... die Anzahl Einheiten, welche zu einem maximalen Gewinn führen.
- Hinweis:
- Der Ertrag ist null, falls keine Einheit verkauft wird, also $E(0) = 0$ CHF.

- 14.10 Angenommen, der Grenzertrag $E'(x)$ und die Ableitung der Durchschnittskosten $\bar{K}'(x)$ eines Unternehmens lauten wie folgt:

$$E'(x) = 400 \text{ CHF}$$

$$\bar{K}'(x) = \left(\frac{2}{15}x - 11 - \frac{10'000}{x^2} \right) \text{ CHF}$$

Aus der Produktion oder Erbringung von 15 Einheiten resultieren Gesamtkosten von 16'750 CHF.

Bestimmen Sie

- a) ... die Gewinnfunktion $G(x)$.
- b) ... die Anzahl Einheiten, welche zu einem maximalen Gewinn führen.
- c) ... den maximalen Gewinn.
- 14.11 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) Eine Stammfunktion einer Funktion ist ...
- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.
- b) Das unbestimmte Integral einer Funktion ist ...
- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.
- c) (siehe nächste Seite)

- c) Falls $f = g'$, dann ist ...
- ... f eine Stammfunktion von g.
 - ... g eine Stammfunktion von f.
 - ... f das unbestimmte Integral von g.
 - ... g das unbestimmte Integral von f.

Lösungen

14.1 a) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ b) $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$
 c) $\int x^{-5} dx = -\frac{1}{4x^4} + C$ d) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 e) $\int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C$ f) $\int 4 dx = 4x + C$
 g) $\int (-7) dx = -7x + C$ h) $\int e^x dx = e^x + C$
 i) $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ j) $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

14.2 a) $\int f(x) dx = \int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$
 b) $\int f(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C$
 c) $\int f(x) dx = \int (x^3 + 2x^2 - 5) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 5x + C$
 d) $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}\right) dx = \frac{1}{12}x^6 + \frac{2}{3x} + C$
 e) $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5\right) dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + C$
 f) $\int f(x) dx = \int \left(x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x\right) dx = \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + C$

14.3 a) $F_1(x) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$ $F_2(x) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$
 b) $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x - 7$ $F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + x - 100$

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst das unbestimmte Integral von f.
- Bestimmen Sie dann den Wert der Integrationskonstante, so dass die genannten Bedingungen erfüllt sind.

14.4 a) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 500$
 b) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1500$

14.5 a) $f'(x) = x^2 - x + 2$
 b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{17}{6}$

14.6 $K(x) = (x^2 + 100x + 200)$ CHF

Hinweise:

- Integrieren Sie zuerst die Grenzkostenfunktion $K'(x) \Rightarrow K(x) = (x^2 + 100x + C)$ CHF ($C \in \mathbb{R}$)
- Bestimmen Sie die Integrationskonstante C, indem Sie die Bedingung $K(0) = 200$ CHF berücksichtigen
 $\Rightarrow C = 200$

14.7 $K(x) = (2x^2 + 2x + 80)$ CHF

14.8 $K(30) = 3750$ CHF

Hinweis:

- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = (2x^2 + 40x + 750)$ CHF.

14.9 a) $G(x) = (-4x^2 + 24x - 20)$ CHF

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ und die Ertragsfunktion $E(x)$.

$$\Rightarrow K(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 + 20x + 20\right) \text{ CHF}$$

$$E(x) = \left(-\frac{5}{2}x^2 + 44x\right) \text{ CHF}$$

- Bestimmen Sie dann die Gewinnfunktion $G(x)$.

b) 3 Einheiten

Hinweise:

- Die Gewinnfunktion $G(x)$ ist eine quadratische Funktion.

- Denken Sie an den Grafen der Gewinnfunktion, wenn Sie das globale Maximum bestimmen.

14.10 a) $G(x) = \left(-\frac{1}{15}x^3 + 11x^2 - 200x - 10'000\right)$ CHF

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Ertragsfunktion $E(x) \Rightarrow E(x) = 400x$ CHF

- Bestimmen Sie dann die Durchschnittskostenfunktion $\bar{K}(x)$

$$\Rightarrow \bar{K}(x) = \left(\frac{1}{15}x^2 - 11x + \frac{10'000}{x} + C\right) \text{ CHF}$$

- Bestimmen Sie dann die Gesamtkostenfunktion $K(x)$

$$\Rightarrow K(x) = \left(\frac{1}{15}x^3 - 11x^2 + 600x + 10'000\right) \text{ CHF}$$

- Bestimmen Sie schliesslich die Gewinnfunktion $G(x) \Rightarrow G(x) = E(x) - K(x) = \dots$

b) 100 Einheiten

Hinweise:

- Bestimmen Sie die lokalen Maxima der Gewinnfunktion $G(x)$.

- Prüfen Sie nach, ob eines der lokal Maxima das globale Maximum ist.

c) $G_{\max} = G(100) = 13'333$ CHF (gerundet)

14.11 a) 2. Aussage

b) 3. Aussage

c) 2. Aussage