Aufgaben 15 Anwendungen der Differentialrechnung
Lokale/Globale Maxima/Minima, Wendepunkte, Betriebsoptimum

Lernziele

- die lokalen Maxima und Minima einer Funktion bestimmen können.
- die Wendepunkte einer Funktion bestimmen können.
- das globale Maximum und das globale Minimum einer Kosten-, Ertrags- und Gewinnfunktion bestimmen können.
- das globale Minimum einer Durchschnittskostenfunktion bestimmen können.
- das Betriebsoptimum bei Produktion und Verkauf einer Ware oder einer Dienstleistung bestimmen können.

Aufgaben

15.1 Bestimmen Sie für jede Funktion …

i) … die lokalen Maxima und Minima.

ii) … die Wendepunkte.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = - 8x^3 + 12x^2 + 18x$

c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$

d) $f(x) = x\, e^{-x}$

e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2$

f) * $V(r) = - D\left(\frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right)$ $(D > 0,\ a > 0)$

15.2 Angenommen, der Gesamtgewinn bei der Herstellung und dem Verkauf einer Ware beträgt

$$G(x) = (2000x + 20x^2 - x^3)\ \text{CHF}$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die Stückzahl x bei maximalem Gewinn, und bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweise:
- Bestimmen Sie zuerst die lokalen Maxima.
- Prüfen Sie dann nach, ob eines der lokalen Maxima das globale Maximum ist.

15.3 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Dienstleistung im Zusammenhang mit einem Digitalisierungs-Projekt sind gegeben durch

$$K(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 4x + 100\right) \cdot 100\ \text{CHF}$$

wobei x ein Mass für den Umfang der Dienstleistung ist. Welcher Wert für x führt zu minimalen Durchschnittskosten? Bestimmen Sie die minimalen Durchschnittskosten.

15.4 Angenommen, die Produktionskapazität für eine bestimmte Ware kann 30 nicht überschreiten. Der Gesamtgewinn dieser Firma ist

$$G(x) = (4x^3 - 210x^2 + 3600x)\ \text{CHF}$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist. Bestimmen Sie die Stückzahl x, welche den Gewinn maximiert.

15.5 (siehe nächste Seite)

15.5 Angenommen, der jährliche Gewinn eines Geschäfts ist gegeben durch

$$G(x) = (- 0.1x^3 + 3x^2) \cdot 1000 \text{ CHF}$$

wobei x die Anzahl Jahre nach 2010 ist. Bestimmen Sie für diese Modellannahme den Wendepunkt für den Gewinn.

15.6 Bei der Herstellung und dem Verkauf einer Ware sei Folgendes bekannt:

- Die Kostenfunktion K(x) ist quadratisch, d.h. $K(x) = ax^2 + bx + c$
- Die Fixkosten betragen 1000 GE (= Geldeinheiten)
- Bei 400 ME (= Mengeneinheiten) betragen die Gesamtkosten 25'000 GE.
- Bei 400 ME betragen die Grenzkosten 100 GE/ME.

Bestimmen Sie …

a) … die Betriebskostenfunktion K(x), d.h. die unbekannten Koeffizienten a, b und c.

b) … das Betriebsoptimum, d.h. sowohl die Menge x als auch die Stückkosten $\overline{K}$ beim Betriebsoptimum.

c) … den kostendeckenden Preis p beim Betriebsoptimum.

Hinweis:
- Lassen Sie bei Ihren Berechnungen der Einfachheit halber die Einheiten ME und GE weg.

15.7 Bei der Produktion eines Artikels der TUFEX AG werden die Gesamtkosten pro Tag in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge x festgelegt durch $K(x) = (0.125\, x^2 + 1.5\, x + 200)$ €. Überdies hat der Betrieb einen konstanten Verkaufspreis von 14 € geplant.

Bestimmen Sie rechnerisch, …

a) … für welche Stückzahlen der Erlös (Ertrag) und die Gesamtkosten gleich gross sind.

b) … für welche Stückzahl der Gewinn am grössten ist.

c) … wie gross dieser maximale Gewinn ist.

15.8 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Falls f ein lokales Maximum bei $x = x_0$ hat, kann gefolgert werden, dass ...

- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x \neq x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x > x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x < x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0

b) Falls $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, kann gefolgert werden, dass f ...

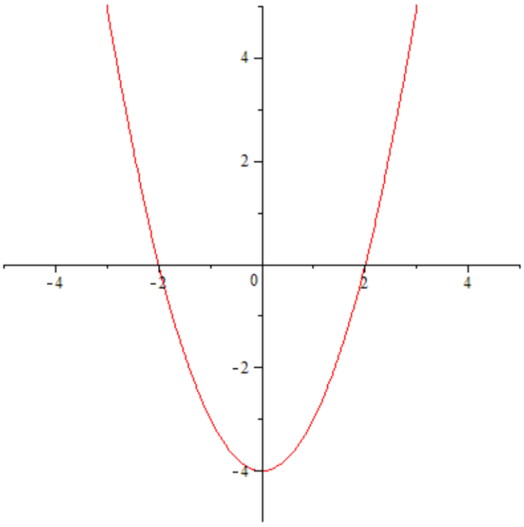
- ☐ ... kein lokales Minimum bei $x = x_0$ hat.
- ☐ ... kein lokales Maximum bei $x = x_0$ hat.
- ☐ ... keinen Wendepunkt bei $x = x_0$ hat.
- ☐ ... einen Wendepunkt bei $x = x_0$ hat.

c) Das globale Maximum einer Funktion ...

- ☐ ... ist immer ein lokales Maximum.
- ☐ ... kann ein lokales Minimum sein.
- ☐ ... kann ein lokales Maximum sein.
- ☐ ... existiert immer.

Lösungen

15.1 a) $f(x) = x^2 - 4$

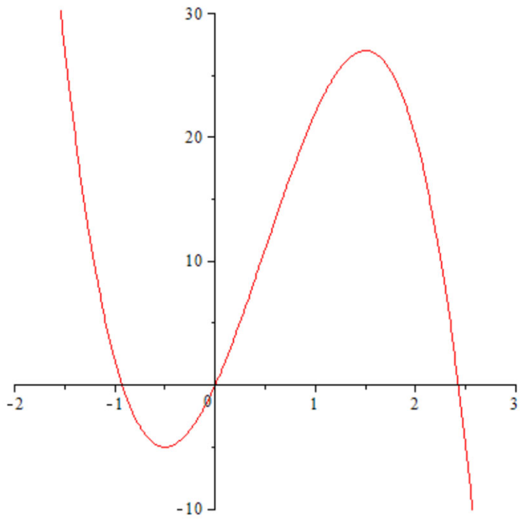


$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$
$f'''(x) = 0$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$
$f''(x_1) = 2 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_1 = 0$
kein lokales Maximum

ii) $f''(x) = 2 \neq 0$ für alle x $\Rightarrow$ kein Wendepunkt

b) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$



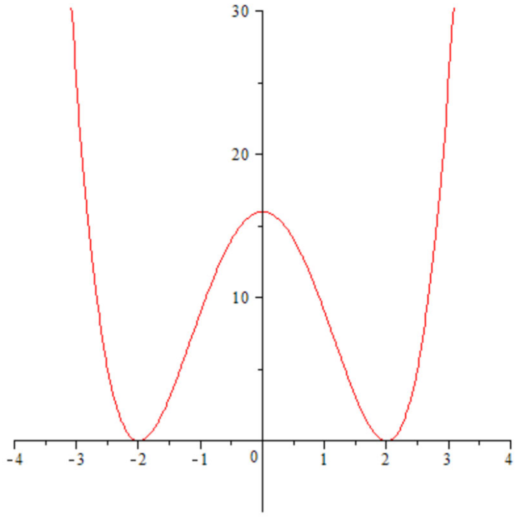
$f'(x) = -24x^2 + 24x + 18$
$f''(x) = -48x + 24$
$f'''(x) = -48$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$
$f''(x_1) = 48 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_1 = -\frac{1}{2}$
$f''(x_2) = -48 < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_2 = \frac{3}{2}$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{1}{2}$

$f'''(x_3) = -48 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_3 = \frac{1}{2}$

c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$



$s'(t) = 4t^3 - 16t$
$s''(t) = 12t^2 - 16$
$s'''(t) = 24t$

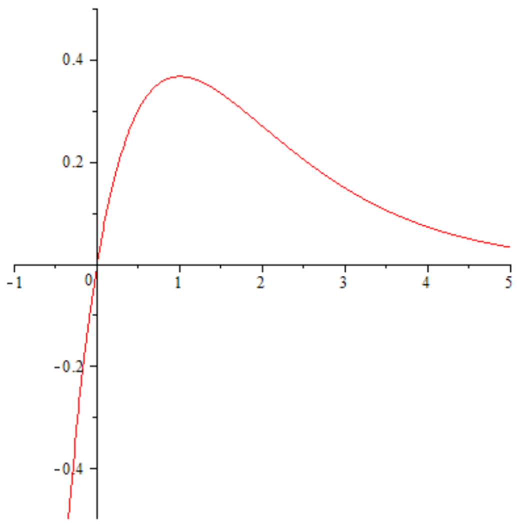
i) $s'(t) = 0$ bei $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ und $t_3 = 2$

$s''(t_1) = -16 < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum bei $t_1 = 0$
$s''(t_2) = 32 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $t_2 = -2$
$s''(t_3) = 32 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $t_3 = 2$

ii) $s''(t) = 0$ bei $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$s'''(t_4) = -\frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
$s'''(t_5) = \frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

d) $f(x) = x\, e^{-x}$

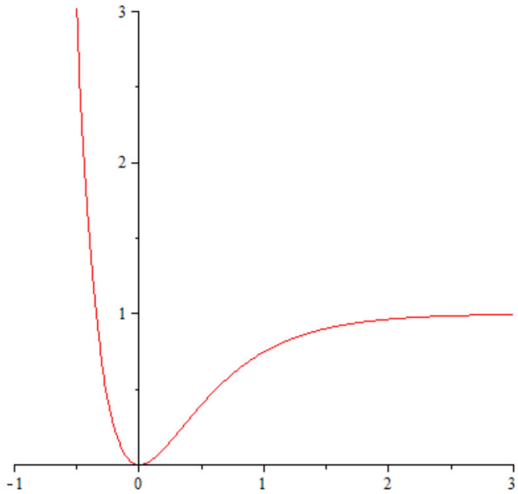


$f'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x} = (1 - x)\, e^{-x}$
$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x)\, e^{-x} = (x - 2)\, e^{-x}$
$f'''(x) = e^{-x} - (x - 2)\, e^{-x} = (3 - x)\, e^{-x}$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 1$
$f''(x_1) = -\frac{1}{e} < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_1 = 1$
kein lokales Minimum

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_2 = 2$
$f'''(x_2) = \frac{1}{e^2} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_2 = 2$

e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2 = 1 - 2\,e^{-2x} + e^{-4x}$



$f'(x) = 4\,e^{-2x} - 4\,e^{-4x} = 4\,e^{-2x}\,(1 - e^{-2x})$
$f''(x) = -8\,e^{-2x} + 16\,e^{-4x} = 8\,e^{-2x}\,(2\,e^{-2x} - 1)$
$f'''(x) = 16\,e^{-2x} - 64\,e^{-4x} = 16\,e^{-2x}\,(1 - 4\,e^{-2x})$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$
$f''(x_1) = 8 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_1 = 0$
kein lokales Maximum

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_2 = \frac{\ln(2)}{2} = 0.34\ldots$
$f'''(x_2) = -8 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_2 = 0.34\ldots$

f) * $V'(r) = -D\left(-\frac{2a}{r^2} + \frac{2a^2}{r^3}\right) = \frac{2aD}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$
$V''(r) = -D\left(\frac{4a}{r^3} - \frac{6a^2}{r^4}\right) = \frac{2aD}{r^3}\left(\frac{3a}{r} - 2\right)$
$V'''(r) = -D\left(-\frac{12a}{r^4} + \frac{24a^2}{r^5}\right) = \frac{12aD}{r^4}\left(1 - \frac{2a}{r}\right)$

i) $V'(r) = 0$ bei $r_1 = a$
$V''(r_1) = \frac{2D}{a^2} > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $r_1 = a$
kein lokales Maximum

ii) $V''(r) = 0$ bei $r_2 = \frac{3a}{2}$
$V'''(r_2) = -\frac{64D}{81a^3} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $r_2 = \frac{3a}{2}$

15.2 (Einziges) **lokales** Maximum bei $x_1 = \frac{100}{3} \rightarrow 33$ oder 34
$G(33) = 51'843$ CHF
$G(34) = 51'816$ CHF
$G(x) < G(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein lokales Minimum gibt
$\Rightarrow$ $G = 51'843$ CHF ist der **globale** maximale Gewinn bei $x = 33$.

15.3 $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \left(\frac{1}{4}x + 4 + \frac{100}{x}\right) \cdot 100$ CHF
$\overline{K}(x)$ hat ein (einziges) **lokales** Minimum bei $x_1 = 20$.
$\overline{K}(20) = 1400$ CHF
$\overline{K}(x) > \overline{K}(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein lokales Maximum gibt.
$\Rightarrow$ $\overline{K} = 1400$ CHF sind die **globalen** minimalen Durchschnittskosten bei $x = 20$.

15.4 G(x) hat ein **lokales** Maximum bei $x_1 = 15$ und ein **lokales** Minimum bei $x_2 = 20$.
$G(x_1) = 20'250$ CHF
$G(x) < G(x_1)$ falls $x < x_1$, da es kein lokales Minimum auf dem Intervall $x < x_1$ gibt.
$G(30) = 27'000$ CHF $> 20'250$ CHF (!)
$\Rightarrow$ $G = 27'000$ CHF ist der **globale** maximale Gewinn am Endpunkt $x = 30$.

15.5 G(x) hat einen Wendepunkt bei $x_1 = 10$.
$G(10) = 200 \cdot 1000$ CHF $= 200'000$ CHF
$\Rightarrow$ Wendepunkt (10 | 200'000 CHF), d.h. wenn $x = 10$ (im Jahr 2020) und $G = 200'000$ CHF

15.6 a) $K(x) = \frac{1}{2}x^2 + 20x + 1000$

b) $x = 100$ ME
$\overline{K}(x) = 40$ GE/ME

c) $p = 40$ GE/ME

15.7 a) $x_1 = 80$, $x_2 = 20$

b) $x = 50$

c) $G(50) = 112.50$ €

15.8 a) 4. Aussage

b) 3. Aussage

c) 3. Aussage