

## Aufgaben 14      Ableitungsregeln Faktor-/Summen-/Produktregel, Höhere Ableitungen

### Lernziele

- die Faktor-, Summen- und Produktregel anwenden können, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen.
- eine höhere Ableitung einer Funktion bestimmen können.

### Aufgaben

14.1 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Faktorregel**:

- |                                     |                              |                         |
|-------------------------------------|------------------------------|-------------------------|
| a) $f(x) = 3x^5$                    | b) $f(x) = -4x^3$            | c) $f(x) = -x^{10}$     |
| d) $f(x) = a \cdot x^3$             | e) $f(x) = n \cdot x^{n-1}$  | f) $f(x) = 9 \cdot 3^x$ |
| g) $s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ | h) $S(T) = \alpha \cdot T^4$ | i) $C(x) = (-3x)^3$     |

14.2 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Summenregel**:

- |   |  |   |
|---|--|---|
| a) $f(x) = x^5 + x^6$                           | b) $f(x) = x^{10} - x^9$                 | c) $f(x) = 1 + x + 3x^3$                  |
| d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2$           | e) $f(x) = 3x^2(x - 2)$                  | f) $f(x) = -3x^8 + x^5 - 3x + 99$         |
| g) $f(x) = ax^2 + bx + c$                       | h) $f(x) = 3(a^2 - 2ax + x^2)$           | i) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$ |
| j) $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}g \cdot t^2$ | k) $V(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$ | l) $K(n) = K_0(1 + ni)$                   |

Hinweis :

- In einigen Teilaufgaben benötigt man zusätzlich die Faktorregel.

14.3 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Produktregel**:

- |                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| a) $f(x) = x \cdot e^x$             | b) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$                                  |
| c) $f(x) = -2x^5(x - 1)$            | d) $f(x) = (2x - 1) \cdot e^x$                             |
| e) $f(x) = (2x - 1)(-3x^2 - x + 1)$ | f) $V(r) = e^r \left( a \cdot r^2 - \frac{b}{r^3} \right)$ |

Hinweis:

- In einigen Teilaufgaben benötigt man zusätzlich die Faktor- und/oder die Summenregel.

14.4 Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Exponentialfunktionen:

- |                      |                          |
|----------------------|--------------------------|
| a) $f(x) = e^{4x}$   | b) $f(x) = e^{-x}$       |
| c) $f(x) = e^{-x^2}$ | d) $f(x) = e^{x^2-2x+5}$ |

14.5 Bestimmen Sie die Ableitung. Verwenden Sie dabei die geeignete(n) Ableitungsregel(n). Vereinfachen und faktorisieren Sie die Ableitung so weit wie möglich:

- |   |                              |
|---|------------------------------|
| a) $f(x) = (x - 2) e^{2x}$                | b) $f(x) = (2 - x^2) e^{-x}$ |
| c) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x - 1) e^{-2x}$ | d) $P(v) = av^2 e^{-bv^2}$   |

14.6 (siehe nächste Seite)

14.6 Bestimmen Sie die Ableitung (Änderungsrate) der angegebenen Funktion an der angegebenen Stelle:

- |    |              |          |    |              |         |
|----|--------------|----------|----|--------------|---------|
| a) | f in 14.1 b) | $x = 2$  | b) | s in 14.1 g) | $t = 4$ |
| c) | f in 14.2 g) | $x = -1$ | d) | P in 14.5 d) | $v = 1$ |

14.7 Bestimmen Sie die zweite und die dritte Ableitung der angegebenen Funktionen. Vereinfachen und faktorisieren Sie die höheren Ableitungen so weit wie möglich:

- |    |              |    |              |
|----|--------------|----|--------------|
| a) | f in 14.1 a) | b) | f in 14.2 g) |
| c) | f in 14.3 a) | d) | f in 14.4 c) |

14.8 Bestimmen Sie die angegebenen höheren Ableitungen:

- a)  $f''(-1)$  für die Funktion f in 14.1 a)  
Hinweis:  
- Sie haben in 14.7 a) bereits  $f'(x)$  bestimmt.
- b)  $f'''(2)$  für die Funktion f in 14.4 c)  
Hinweis:  
- Sie haben in 14.7 d) bereits  $f''(x)$  bestimmt.

14.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Die dritte Ableitung einer Funktion ist eine ...
- ... konstante Funktion, falls die zweite Ableitung eine quadratische Funktion ist.
  - ... quadratische Funktion, falls die zweite Ableitung eine lineare Funktion ist.
  - ... lineare Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.
  - ... konstante Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.
- b) Die Ableitung ...
- ... eines Produkts ist das Produkt der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
  - ... eines Produkts ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
  - ... einer Summe ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden.
  - ... einer Konstanten ist die Konstante selbst.
- c) Für  $f(x) = c \cdot g(x) \cdot h(x)$  gilt  $f'(x) = \dots$
- ... 0
  - ...  $c \cdot g'(x) \cdot h'(x)$
  - ...  $c \cdot g(x) \cdot h'(x) + c \cdot g'(x) \cdot h(x)$
  - ...  $c \cdot g'(x) \cdot h'(x) + c \cdot g(x) \cdot h(x)$

**Lösungen**

- 14.1 a)  $f'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$   
 b)  $f'(x) = (-4) 3x^2 = -12x^2$   
 c)  $f'(x) = (-1) 10x^9 = -10x^9$   
 d)  $f'(x) = a \cdot 3x^2 = 3ax^2$

Hinweis:  
- a ist eine Konstante.

- e)  $f'(x) = n(n-1)x^{n-2}$   
 f)  $f'(x) = 9 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$   
 g)  $s'(t) = \frac{g}{2} 2t = gt$

Hinweise:  
- Der Name der Funktion ist s, und die Variable ist t.  
- g ist eine Konstante.

- h)  $S'(T) = \alpha \cdot 4T^3 = 4\alpha T^3$   
 i)  $C'(x) = -81x^2$

- |         |                       |    |  |    |                               |
|---------|-----------------------|----|--|----|-------------------------------|
| 14.2 a) | $f'(x) = 5x^4 + 6x^5$ | b) | $f'(x) = 10x^9 - 9x^8$                   | c) | $f'(x) = 1 + 9x^2$            |
| d)      | $f'(x) = x^3 + 6x$    | e) | $f'(x) = 9x^2 - 12x$                     | f) | $f'(x) = -24x^7 + 5x^4 - 3$   |
| g)      | $f'(x) = 2ax + b$     | h) | $f'(x) = -6a + 6x$                       | i) | $f'(x) = x^2 + \frac{9}{x^4}$ |
| j)      | $s'(t) = v_0 + gt$    | k) | $V'(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3}$ | l) | $K'(n) = K_0 \cdot i$         |

- 14.3 a)  $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$   
 b)  $f'(x) = 3x^2 \cdot 3^x + x^3 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$   
 c)  $f'(x) = -2(5x^4(x-1) + x^5)$   
 d)  $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x$   
 e)  $f'(x) = 2(-3x^2 - x + 1) + (2x-1)(-6x-1)$   
 f)  $V'(r) = e^r \left( a \cdot r^2 - \frac{b}{r^3} \right) + e^r \left( 2a \cdot r + \frac{3b}{r^4} \right)$

Hinweise:  
- V ist der Name der Funktion, und r ist die Variable.  
- a und b sind Konstanten.

- |         |                              |    |                                 |
|---------|------------------------------|----|---------------------------------|
| 14.4 a) | $f'(x) = 4 e^{4x}$           | b) | $f'(x) = (-1) e^{-x} = -e^{-x}$ |
| c)      | $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ | d) | $f'(x) = (2x-2) e^{x^2-2x+5}$   |

- 14.5 a)  $f'(x) = e^{2x} + (x-2) 2 e^{2x} = (2x-3) e^{2x}$   
 b)  $f'(x) = -2x e^{-x} + (2-x^2)(-1) e^{-x} = (x^2-2x-2) e^{-x}$   
 c)  $f'(x) = (9x^2-4x+1) e^{-2x} + (3x^3-2x^2+x-1)(-2) e^{-2x} = (-6x^3+13x^2-6x+3) e^{-2x}$   
 d)  $P'(v) = a \left( 2v e^{-bv^2} + v^2(-2bv) e^{-bv^2} \right) = 2av(1-bv^2) e^{-bv^2}$

14.6 (siehe nächste Seite)

- 14.6 a)  $f'(2) = -48$  b)  $s'(4) = 4g$   
c)  $f'(-1) = -2a + b$  d)  $P'(1) = 2a(1 - b)e^{-b}$
- 14.7 a) 14.1 a)  
 $f''(x) = 15 \cdot 4x^3 = 60x^3$   
 $f'''(x) = 60 \cdot 3x^2 = 180x^2$   
b) 14.2 g)  
 $f''(x) = 2a \cdot 1 = 2a$   
 $f'''(x) = 0$   
c) 14.3 a)  
 $f''(x) = e^x + (e^x + x \cdot e^x) = (x + 2)e^x$   
 $f'''(x) = e^x + (x + 2)e^x = (x + 3)e^x$   
d) 14.4 c)  
 $f''(x) = -2(e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2}) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$   
 $f'''(x) = 2(4xe^{-x^2} + (2x^2 - 1)(-2x)e^{-x^2}) = 4x(-2x^2 + 3)e^{-x^2}$
- 14.8 a)  $f''(-1) = 60(-1)^3 = -60$   
b)  $f'''(2) = 4 \cdot 2(-2 \cdot 2^2 + 3)e^{-2^2} = -\frac{40}{e^4}$
- 14.9 a) 4. Aussage  
b) 3. Aussage  
c) 3. Aussage