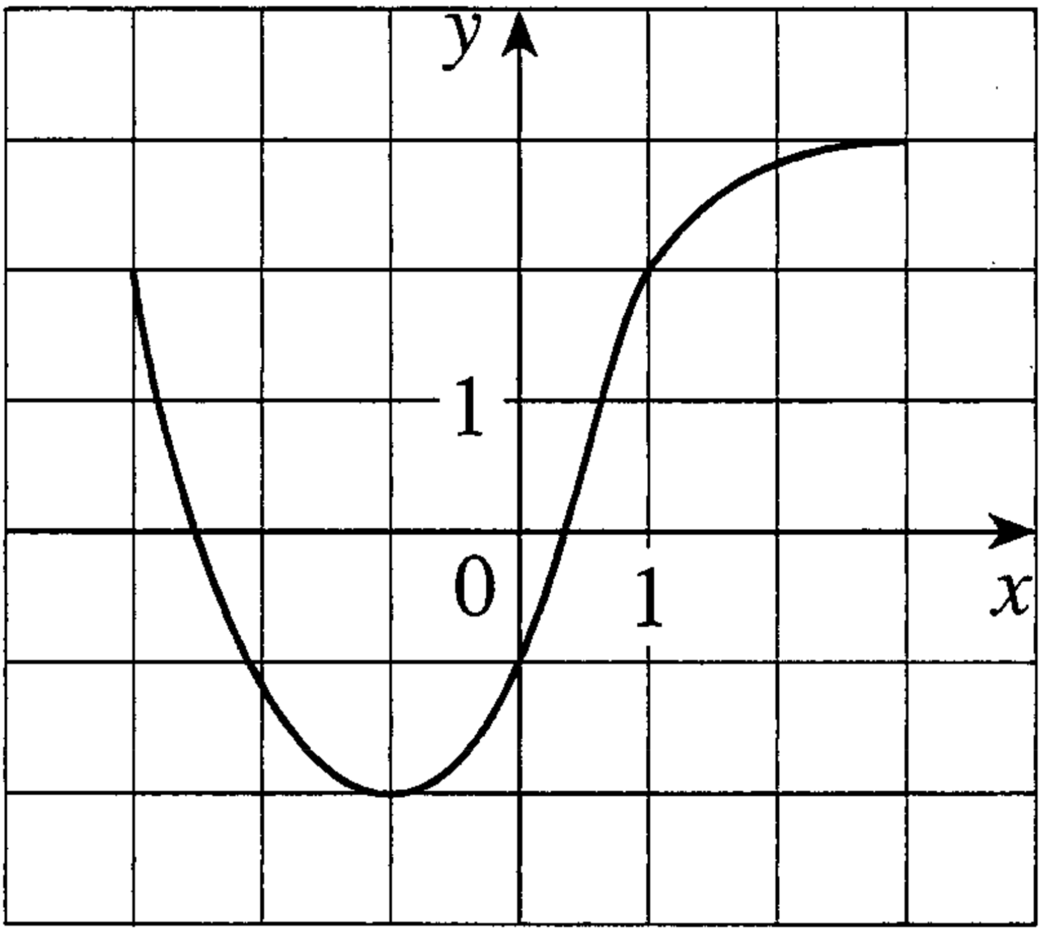
Aufgaben 13 Ableitung
Ableitung (Änderungsrate), Ableitung (Ableitungsfunktion) einer konstanten Funktion/Potenz-/Exponentialfunktion

Lernziele

- eine Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion aus dem Grafen der Funktion abschätzen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer konstanten und einer linearen Funktion angeben können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer konstanten und einer linearen Funktion bestimmen können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer elementaren Polynomfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer elementaren Polynomfunktion und einer elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.

Aufgaben

13.1 Gegeben ist der Graf einer Funktion f:



Schätzen Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ an der gegebenen Stelle x_0 ab:

a) $x_0 = -1$ b) $x_0 = 0$

c) $x_0 = 1$ d) $x_0 = -2$

Hinweise:
- Zeichnen Sie die Tangente an den Grafen von f an der gegebenen Stelle x_0.
- Wählen Sie zwei beliebige Punkte auf der Tangente, und schätzen Sie ihre Koordinaten ab.
- Bestimmen Sie die Steigung der Tangente mit Hilfe der abgeschätzten Koordinaten der beiden Punkte.

13.2 Bearbeiten Sie für jede der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = ...$ die folgenden Teilaufgaben:

i) Zeichnen Sie den Grafen von f.

ii) Geben Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ an der gegebenen Stelle x_0 an.

a) $f(x) = 3$ $x_0 = 2$

b) $f(x) = c \ (c \in \mathbb{R})$ irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = 2x - 3$ $x_0 = 4$

d) $f(x) = mx + q \ (m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, q \in \mathbb{R})$ irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$

Hinweis:
- Wenn der Graf einer Funktion f eine Gerade ist, dann ist die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ die Steigung dieser Geraden, d.h. $f'(x_0)$ ist an jeder Stelle x_0 gleich gross, hängt also nicht von x_0 ab.

13.3 Bestimmen Sie $f'(x)$:

a)	$f(x) = 3$	b)	$f(x) = 0$	c)	$f(x) = -1$
d)	$f(x) = x^3$	e)	$f(x) = x^4$	f)	$f(x) = x^5$
g)	$f(x) = x^{17}$	h)	$f(x) = x^{200}$	i)	$f(x) = x^{100'001}$
j)	$f(x) = x^{-1}$	k)	$f(x) = x^{-2}$	l)	$f(x) = x^{-17}$
m)	$f(x) = \frac{1}{x}$	n)	$f(x) = \frac{1}{x^3}$	o)	$f(x) = \frac{1}{x^{99}}$
p)	$f(x) = 3^x$	q)	$f(x) = 5^x$	r)	$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

13.4 Bestimmen Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ der Funktion f an der angegebenen Stelle x_0:

a) $f(x) = x$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = 1$ iii) $x_0 = -2$

b) $f(x) = x^5$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = 2$ iii) $x_0 = -\frac{2}{3}$

c) $f(x) = x^{-4}$

i) $x_0 = -1$ ii) $x_0 = -\frac{4}{3}$ iii) $x_0 = 0$

d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = 1$ iii) $x_0 = -2$

13.5 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion f an der Stelle x_0 ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl.
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Tangente.
- ☐ ... ein Graf.

b) (siehe nächste Seite)

b) Die Ableitung (Ableitungsfunktion) f ' einer Funktion f ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl.
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Tangente.
- ☐ ... ein Graf.

c) $f'(x_0)$ ist die Steigung der ...

- ☐ ... Sekante durch die Punkte $(0|0)$ und $(x_0|f(x_0))$.
- ☐ ... Sekante durch die Punkte $(x_0+\Delta x|f(x_0+\Delta x))$ und $(x_0|f(x_0))$.
- ☐ ... Tangente an den Grafen von f durch $(x_0|f(x_0))$.
- ☐ ... Tangente an den Grafen von f ' durch $(x_0|f(x_0))$.

Lösungen

13.1	a)	$f'(-1) \approx 0$					
	b)	$f'(0) \approx 2$					
	c)	$f'(1) \approx \frac{3}{2}$					
	d)	$f'(-2) \approx -\frac{5}{3}$					
13.2	a)	i)	...				
		ii)	$f'(2) = 0$				
	b)	i)	...				
		ii)	$f'(x_0) = 0$	an jeder Stelle x_0			
	c)	i)	...				
		ii)	$f'(4) = 2$				
	d)	i)	...				
		ii)	$f'(x_0) = m$	an jeder Stelle x_0			
13.3	a)	$f'(x) = 0$		b)	$f'(x) = 0$	c)	$f'(x) = 0$
	d)	$f'(x) = 3x^2$		e)	$f'(x) = 4x^3$	f)	$f'(x) = 5x^4$
	g)	$f'(x) = 17x^{16}$		h)	$f'(x) = 200x^{199}$	i)	$f'(x) = 100'001x^{100'000}$
	j)	$f'(x) = -x^{-2}$		k)	$f'(x) = -2x^{-3}$	l)	$f'(x) = -17x^{-18}$
	m)	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$		n)	$f'(x) = -\frac{3}{x^4}$	o)	$f'(x) = -\frac{99}{x^{100}}$
	p)	$f'(x) = 3^x \ln(3)$		q)	$f'(x) = 5^x \ln(5)$	r)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$
13.4	a)	$f'(x) = 1$					
		i)	$f'(0) = 1$	ii)	$f'(1) = 1$	iii)	$f'(-2) = 1$
	b)	$f'(x) = 5x^4$					
		i)	$f'(0) = 0$	ii)	$f'(2) = 80$	iii)	$f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{80}{81}$
	c)	$f'(x) = -\frac{4}{x^5}$					
		i)	$f'(-1) = 4$	ii)	$f'\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{243}{256}$	iii)	$f'(0)$ ist nicht definiert (Division durch null)
	d)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$					
		i)	$f'(0) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$	ii)	$f'(1) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$	iii)	$f'(-2) = \frac{9}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$
13.5	a)	1. Aussage					
	b)	2. Aussage					
	c)	3. Aussage					