

## Aufgaben 12      Exponentialfunktion und -gleichungen Nachschüssige/Vorschüssige Rente

### Lernziele

- den Anfangs- und den Endwert einer Rente berechnen können, falls konstante Zahlungen am Anfang oder am Ende jeder Zinsperiode getätigt werden.
- ausgewählte Rentenprobleme bearbeiten können.

### Aufgaben

#### Nachschüssige Rente

12.1 Bestimmen Sie den Endwert einer Rente, bei welcher 5 Jahre lang am Ende jedes Jahres 1300 CHF einbezahlt werden und der Zinssatz 6% beträgt.

12.2 Die Formel

$$R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wird verwendet, um den Endwert  $R_n$  einer nachschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach  $r$  und  $n$ .

12.3 Eine Familie möchte für die Ausbildung ihrer Kinder bis in 20 Jahren 200'000 CHF ansparen. Welche Summe muss am Ende jedes Quartals einbezahlt werden, falls die Anlage vierteljährlich zu einem jährlichen Zinssatz von 7.6% verzinst wird?

12.4 Angenommen, 2500 CHF werden am Ende jedes Quartals auf ein Konto einbezahlt, welches bei einem Zinssatz von 5% vierteljährlich verzinst wird. Nach wievielen Quartalen liegen auf dem Konto 80'000 CHF?

12.5 Nehmen Sie an, dass Geld auf einem Konto einen Zins von 1.5% trägt und jährlich verzinst wird. Man möchte nach 10 Jahren 20'000 CHF haben.

- Welcher Betrag muss am Ende jedes Jahres einbezahlt werden?
- Welchen Betrag müsste man zu Beginn einbezahlen, falls während der ganzen Zeit keine weiteren Zahlungen mehr getätigt würden?
- Vergleichen Sie die Ergebnisse in a) und b). Erklären Sie, warum die Zahlung in b) kleiner ist als die Summe aller 10 Zahlungen in a).

12.6 Zwei Zwillinge sind 23 Jahre alt und haben verschiedene Anlagestrategien.

Nehmen Sie an, dass der Zwilling 1 10 Jahre lang (bis er 33 Jahre alt ist) am Ende jedes Jahres 2000 CHF auf ein Konto einzahlt, welches jährlich verzinst wird zu 8%. Der Zwilling 2 hingegen wartet mit seiner Investition, bis er 40 Jahre alt ist.

Wieviel muss der Zwilling 2 in den darauffolgenden 25 Jahren am Ende jedes Jahres auf ein Konto einzahlen, das jährlich verzinst wird bei 8%, so dass er am Ende dieser 25 Jahre (wenn beide 65 Jahre alt sind) den gleichen Betrag hat wie der Zwilling 1?

Hinweise:

- Zeichnen Sie ein Diagramm, welches die Anlagestrategien der beiden Zwillinge im zeitlichen Verlauf darstellt.
- Das Geld, welches der Zwilling 1 eingezahlt hat, bis er 33 Jahre alt ist, trägt Zins, bis er 65 Jahre alt ist.

12.7 Bestimmen Sie den Anfangswert einer Rente, bei welcher 8 Jahre lang am Ende jedes Halbjahres 6000 CHF ausbezahlt werden, falls das Geld halbjährlich verzinst wird bei einem Jahreszinssatz von 8%.

12.8 Die Formel

$$R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q - 1)}$$

wird verwendet, um den Anfangswert  $R_0$  einer nachschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach  $r$  und  $n$ .

12.9 Wieviel Geld kann 10 Jahre lang am Ende jedes Quartals abgehoben werden, wenn der Anfangswert der Rente 135'000 CHF beträgt und das Geld vierteljährlich verzinst wird bei einem Jahreszinssatz von 6.4%?

12.10 Ein Konto, welches als zusätzliche Altersvorsorge dienen soll, enthält 242'000 CHF. Nehmen Sie an, dass 200'000 CHF für eine Rente verwendet werden sollen, welche vierteljährlich bei einem Jahreszinssatz von 6% verzinst wird und bei welcher am Ende jedes Quartals 4500 CHF abgehoben werden sollen. Wie lange geht es, bis der Kontostand 0 CHF ist?

12.11 Herr B. besitzt einen Wohnwagen. Er könnte ihn jetzt für 20'000 CHF verkaufen. Als Alternative könnte er ihn 10 Jahre lang zu 2100 CHF pro Jahr vermieten, wobei die Miete jeweils am Jahresende bezahlt würde. Nach 10 Jahren wäre der Wohnwagen vollständig abgeschrieben. Herr B. könnte die Einnahmen (bei Verkauf oder Vermietung des Wohnwagens) zu 7% anlegen bei jährlicher Verzinsung. Welche Alternative ist vorteilhafter, Verkauf oder Vermietung?

12.12 Gemäss eines Darlehensvertrages für Wohneigentum werden am Ende jedes Jahres 3600 CHF einbezahlt. Das Geld wird zu 3% verzinst. Nach 10 Jahren wird der doppelte angesparte Betrag ausgezahlt. Die Schulden, deren Zinsen 5% betragen, müssen innert weiterer 10 Jahren abgezahlt werden, und zwar in Raten, die jeweils am Jahresende fällig werden. Wie gross sind die jährlichen Raten (um die Schulden abzutragen)?

#### *Vorschüssige Rente*

12.13 Die beiden Formeln

$$R_n = rq \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{und} \quad R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q - 1)}$$

werden verwendet, um den Endwert  $R_n$  oder den Anfangswert  $R_0$  einer nachschüssigen Rente zu berechnen.

Lösen Sie beide Formeln nach  $r$  und  $n$ .

12.14 Bestimmen Sie den Endwert einer vorschüssigen Rente, bei welcher 2.5 Jahr lang vierteljährlich 100 CHF einbezahlt werden und das Geld bei einem Jahreszinssatz von 12% vierteljährlich verzinst wird.

12.15 Wieviel muss zu Beginn jedes Jahres auf ein Konto einbezahlt werden, welches bei 8% jährlich verzinst wird, damit das Konto nach 5 Jahren 24'000 CHF enthält?

12.16 Angenommen, ein Konto, welches zu 5% vierteljährlich verzinst wird, enthalte am Anfang 80'000 CHF, und es werden zu Beginn jedes Quartals 2500 CHF abgehoben. Nach wievielen Quartalen wird das Konto 0 CHF enthalten?

12.17 Welche Geldmenge muss jetzt zur Seite gelegt werden, um in den nächsten 12 Jahren Zahlungen von 50'000 CHF zu Jahresbeginn zu generieren, wenn das Geld zu einem Satz von 5.92% jährlich verzinst wird?

12.18 Was für eine Rate generiert ein einmaliger, am Jahresende ausbezahlter Bonus von 25'000 CHF am Anfang jedes Monats des folgenden Jahres, wenn das Geld zu einem Jahreszins von 6.48% monatlich verzinst wird?

### Vermischte Aufgaben

12.19 Ein Paar ist zum Schluss gekommen, dass es 300'000 CHF braucht, um eine Rente aufzubauen, wenn sie in 25 Jahren in Pension gehen. Wieviel Geld müssen sie am Ende jedes Monats auf ein Konto einzahlen, welches einen Zinssatz von 10% trägt und monatlich verzinst wird, damit sie in 25 Jahren 300'000 CHF haben?

12.20 Herr Müller plant, 300 CHF am Ende jedes Monats auf ein Konto einzuzahlen, welches bei 9% monatlich verzinst wird. Nach wievielen Monaten wird das Konto 50'000 CHF wert sein?

12.21 Ein Grosselternpaar plant, am Geburtstag ihres Grosskindes ein Konto zu eröffnen und jeden Monat einen Betrag einzuzahlen, bis das Grosskind 18 Jahre alt ist. Wieviel müssen die Grosseltern zu Beginn jedes Monats einzahlen, damit der Kontostand am Ende der 18 Jahre 180'000 CHF beträgt, wenn die Anlage bei einem Jahreszinssatz von 12% monatlich verzinst wird?

12.22 Eine Versicherung im Wert von 750'000 CHF muss das Einkommen einer Person für die nächsten 40 Jahre ersetzen. Welches Einkommen generiert diese Summe am Ende jedes Monats, wenn das Geld als Rente investiert wird, welche zu einem Jahreszinssatz von 8.4% monatlich verzinst wird?

12.23 Saras Eltern wollen für ihre Ausbildung eine Renten-Anlage errichten. Sie möchten, dass ihre Tochter 16 vierteljährliche Rückzüge zu 2000 CHF tätigen kann, wobei die erste Auszahlung in 3 Monaten erfolgen soll. Wieviel müssen die Eltern jetzt einzahlen, wenn das Geld bei 7.2% vierteljährlich verzinst wird?

12.24 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Bei einer nachschüssigen Rente ...

- ... wird Geld immer einmal pro Jahr ein- oder ausbezahlt.
- ... wird Geld am Anfang jeder Zinsperiode ein- oder ausbezahlt.
- ... wächst oder fällt der Wert der Rente exponentiell.
- ... werden keine Zahlungen während der Zinsperiode getätigt.

b) Bei einer nachschüssigen Rente erfolgt die Verzinsung monatlich. Wenn jeden Monat 100 CHF einbezahlt werden, kann gefolgert werden, dass der Wert der Rente nach einem Jahr ...

- ... 1200 CHF ist.
- ... 1320 CHF ist, falls der jährliche Zinssatz 10% beträgt.
- ... weniger als 1320 CHF ist, falls der jährliche Zinssatz 10% beträgt.
- ... weniger als 1200 CHF ist.

c) (siehe nächste Seite)

- c) Angenommen, ein Anfangskapital beträgt 1000 CHF. Bei einer vorschüssigen Rente (Zinssatz = 1%, jährliche Verzinsung) soll 10-mal zu Beginn jedes Jahres ein konstanter Betrag ausbezahlt werden. Daraus folgt, dass die jährlichen Rückzüge ...
- ... nicht höher als 100 CHF sein dürfen.
  - ... genau 100 CHF sein müssen.
  - ... doppelt so hoch sein könnten, falls der Zinssatz 2% wäre.
  - ... höher sein könnten bei einer nachschüssigen Rente.

## Lösungen

12.1  $R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 1300$  CHF,  $q = 1 + 6\% = 1.06$ ,  $n = 5$   
 $\Rightarrow R_5 = 7328.22$  CHF (gerundet)

12.2 siehe [Formelsammlung](#)

12.3  $r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = 200'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{7.6\%}{4}$ ,  $n = 20 \cdot 4 = 80$   
 $\Rightarrow r = 1083.40$  CHF (gerundet)

12.4  $n = \frac{\lg\left(\frac{R_n(q-1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_n = 80'000$  CHF,  $r = 2500$  CHF,  $q = 1 + \frac{5\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 27.08... \rightarrow 28$  Quartale = 7 Jahre

12.5 a) Nachschüssige Rente  
 $r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = 20'000$  CHF,  $q = 1 + 1.5\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow r = 1868.70$  CHF (aufgerundet)

b) Zinseszins  
 $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$  mit  $K_n = 20'000$  CHF,  $q = 1 + 1.5\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow K_0 = 17'233.35$  CHF (aufgerundet)

c) Die Zahlung in b) trägt während der ganzen 10 Jahre Zins.  
Die einzelnen Zahlungen in a) tragen nicht während der ganzen 10 Jahren Zins.

12.6 Zwilling 1: Nachschüssige Rente (Alter 23 bis 33)  
 $R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 2000$  CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 10$   
 $\Rightarrow R_{10} = \text{Kapital im Alter 33} = 28'973.12$  CHF (gerundet)

Zinseszins (Alter 33 bis 65)

$K_n = K_0 q^n$  mit  $K_0 = R_{10}$ ,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 32$   
 $\Rightarrow K_{32} = \text{Kapital im Alter 65} = 340'059.97$  CHF (gerundet)  
( $K_{32} = \text{Kapital Zwilling 2 im Alter 65}$ )

Zwilling 2: Nachschüssige Rente (Alter 40 bis 65)  
 $r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = K_{32}$  (Zwilling 1) = 340'059.97 CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 25$   
 $\Rightarrow r = 4651.61$  CHF (gerundet)

12.7  $R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$  mit  $r = 6000$  CHF,  $q = 1 + \frac{8\%}{2}$ ,  $n = 8 \cdot 2 = 16$   
 $\Rightarrow R_0 = 69'913.77$  CHF (gerundet)

12.8 siehe [Formelsammlung](#)

12.9  $r = \frac{R_0 q^n (q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 135'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{6.4\%}{4}$ ,  $n = 10 \cdot 4 = 40$   
 $\Rightarrow r = 4595.46$  CHF (gerundet)

12.10  $n = \frac{\lg\left(\frac{r}{r - R_0(q-1)}\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_0 = 200'000$  CHF,  $r = 4500$  CHF,  $q = 1 + \frac{6\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 73.78\dots \rightarrow 73$  Quartale (weniger als 4500 CHF am Ende des 74. Quartals)

12.11 Alternative 1 (Verkauf des Wohnwagens): Zinseszins

$$K_n = K_0 q^n \quad \text{mit } K_0 = 20'000 \text{ CHF, } q = 1 + 7\%, n = 10$$
$$\Rightarrow K_{10} = 39'343 \text{ CHF (gerundet)}$$

Alternative 2 (Vermietung des Wohnwagens): Nachschüssige Rente

$$R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } r = 2100 \text{ CHF, } q = 1 + 7\%, n = 10$$
$$\Rightarrow R_{10} = 29'015 \text{ CHF (gerundet)}$$

$\Rightarrow K_{10} > R_{10}$ , d.h. Alternative 1 ist vorteilhafter

12.12 2 Renten: erste 10 Jahre (Geld einzahlen), zweite 10 Jahre (Schulden abzahlen)  
- erste 10 Jahre (Geld sparen, d.h. Geld einzahlen)

$$R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{mit } r = 3600 \text{ CHF, } q = 1 + 3\%, n = 10$$
$$\Rightarrow R_{10} = 41'270 \text{ CHF (gerundet)}$$

- zweite 10 Jahre (Schulden abzahlen)

$$r = \frac{R_0 q^n (q-1)}{q^n - 1} \quad \text{mit } R_0 = 41'270 \text{ CHF, } q = 1 + 5\%, n = 10$$
$$\Rightarrow r = 5345 \text{ CHF (gerundet)}$$

12.13 siehe [Formelsammlung](#)

12.14  $R_n = r q \frac{q^n - 1}{q - 1}$  mit  $r = 100$  CHF,  $q = 1 + \frac{12\%}{4}$ ,  $n = 2.5 \cdot 4 = 10$   
 $\Rightarrow R_{10} = 1180.78$  CHF (gerundet)

12.15  $r = \frac{R_n (q-1)}{q(q^n - 1)}$  mit  $R_n = 24'000$  CHF,  $q = 1 + 8\%$ ,  $n = 5$   
 $\Rightarrow r = 3787.92$  CHF (gerundet)

12.16  $n = \frac{\lg\left(\frac{rq}{rq - R_0(q-1)}\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_0 = 80'000$  CHF,  $r = 2500$  CHF,  $q = 1 + \frac{5\%}{4}$   
 $\Rightarrow n = 40.46\dots \rightarrow 40$  Quartale (weniger als 2500 CHF am Anfang des 41. Quartals)

12.17  $R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$  mit  $r = 50'000$  CHF,  $q = 1 + 5.92\%$ ,  $n = 12$   
 $\Rightarrow R_0 = 445'962.23$  CHF (gerundet)

12.18  $r = \frac{R_0 q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 25'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{6.48\%}{12}$ ,  $n = 1 \cdot 12 = 12$   
 $\Rightarrow r = 2145.59$  CHF (gerundet)

12.19 Nachschüssige Rente

$r = \frac{R_n(q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_n = 300'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{10\%}{12}$ ,  $n = 25 \cdot 12 = 300$   
 $\Rightarrow r = 226.10$  CHF (gerundet)

12.20 Nachschüssige Rente

$n = \frac{\lg\left(\frac{R_n(q-1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)}$  mit  $R_n = 50'000$  CHF,  $r = 300$  CHF,  $q = 1 + \frac{9\%}{12}$   
 $\Rightarrow n = 108.52... \rightarrow 109$  Monate (= 9 Jahre 1 Monat)

12.21 Vorschüssige Rente

$r = \frac{R_n(q-1)}{q(q^n - 1)}$  mit  $R_n = 180'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{12\%}{12}$ ,  $n = 18 \cdot 12 = 216$   
 $\Rightarrow r = 235.16$  CHF (gerundet)

12.22 Nachschüssige Rente, Einkommen = monatliche Zahlung r

$r = \frac{R_0 q^n (q-1)}{q^n - 1}$  mit  $R_0 = 750'000$  CHF,  $q = 1 + \frac{8.4\%}{12}$ ,  $n = 40 \cdot 12 = 480$   
 $\Rightarrow r = 5441.23$  CHF (gerundet)

12.23 Nachschüssige Rente

$R_0 = r \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$  mit  $r = 2000$  CHF,  $q = 1 + \frac{7.2\%}{4}$ ,  $n = 16$   
 $\Rightarrow R_0 = 27'590.62$  CHF (gerundet)

- 12.24 a) 4. Aussage  
b) 3. Aussage  
c) 4. Aussage