

Aufgaben 6 Lineare Funktion und Gleichungen Lineare Gleichungssysteme

Lernziele

- ein lineares Gleichungssystem lösen können.
- angewandte Problemstellungen mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen bearbeiten können.

Aufgaben

6.1 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

- | | | | |
|----|--|----|--|
| a) | $4x + 3y = 14$
$2x - y = 12$ | b) | $-4a - b = 40$
$a + 5b = 9$ |
| c) | $12x + 9y = 15$
$4x + 3y = 5$ | d) | $a - 4b = 3$
$-5a + 20b = 10$ |
| e) | $2p - 6q = 6$
$5p + 3q = 42$ | f) | $(x + 5)(y + 1) = (x + 8)(y - 3)$
$(x - 3)(y - 1) = (x - 1)(y + 3)$ |
| g) | $2(2a + 3b) = 3(3a - b) + 5$
$4(3a - 4b) = 2(a + b) - 10$ | | |

6.2 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion, deren Graf die zwei Punkte P und Q enthält:

- | | | |
|----|---------|----------|
| a) | P(5 -3) | Q(-2 1) |
| b) | P(2 -3) | Q(-1 -4) |
| c) | P(3 -7) | Q(3 -9) |

6.3 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Grafen der beiden linearen Funktionen f und g:

- | | | |
|----|--|---|
| a) | f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = -3x + \frac{5}{4}$ | g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = g(x) = -x - 1$ |
| b) | f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = f(x) = 2x + \frac{5}{4}$ | g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto y = g(x) = 2x - 1$ |

6.4 Manager A sagt zu Manager B: "Wenn drei Viertel Deiner Angestellten bei mir arbeiten würden, hätte ich 100 Angestellte." Manager B antwortet: "Wenn die Hälfte Deiner Angestellten in meinem Betrieb tätig wären, hätte ich 100 Angestellte."

Wieviele Angestellte beschäftigen A und B in ihren Betrieben?

6.5 Die (nicht-lineare) Gleichung $ax^2 + bx = 1$ hat die Lösungsmenge $L = \{2, 3\}$, d.h. die Gleichung hat die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

Bestimmen Sie die beiden Parameter a und b.

6.6 3000 CHF werden drei Gewinnern verliehen. Der erste Preis beträgt $\frac{5}{3}$ des zweiten, während der zweite Preis $\frac{3}{2}$ des dritten beträgt.

Bestimmen Sie die Höhe der drei Preise.

- 6.7 In einer Familie ist die Mutter 32 Jahre älter als die Tochter, während der Vater 26 Jahre älter ist als der Sohn. Die Mutter und die Tochter sind zusammen 10 Jahre älter als der Vater. Die Differenz zwischen dem Alter des Sohnes und dem Alter der Tochter ist doppelt so gross wie die Differenz der Alter der beiden Eltern.

Bestimmen Sie das Alter jedes Familienmitglieds.

- 6.8 Red Tide und Blue Flake planen die Produktionslinie neuer Skis.

Red Tide

Im ersten Jahr betragen die Fixkosten für den Aufbau der Produktion 90'000 CHF. Die variablen Kosten für die Produktion jedes Skipaars werden zu 160 CHF geschätzt, und der Verkaufspreis wird 510 CHF pro Paar betragen. Geplant wird, im ersten Jahr 3000 Paare zu verkaufen.

Blue Flake

Im ersten Jahr betragen die Fixkosten für den Aufbau der Produktion 80'000 CHF. Die variablen Kosten für die Produktion jedes Skipaars werden zu 160 CHF geschätzt, und der Verkaufspreis wird 500 CHF pro Paar betragen. Geplant wird, im ersten Jahr 3500 Paare zu verkaufen.

Wieviele Paare Skis müssen Red Tide und Blue Flake verkaufen, um den gleichen Gewinn zu erzielen?
Wie hoch ist dieser Gewinn?

- 6.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

- a) Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ...

- ... ist nicht zwingend eine Lösung jeder Gleichung des Gleichungssystems.
 ... ist nicht zwingend ein Element der Lösungsmenge.
 ... besteht aus zwei Lösungen, falls das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen besteht.
 ... besteht aus einem Paar zweier reeller Zahlen, falls das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen besteht.

- b) Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ...

- ... entspricht immer einem gemeinsamen Punkt von Grafen linearer Funktionen.
 ... entspricht immer einem Schnittpunkt von genau zwei Geraden.
 ... entspricht immer einem Punkt im dreidimensionalen Raum.
 ... ist die einzige Lösung, falls die Grafen der entsprechenden linearen Funktionen parallel sind.

- c) Wenn ein lineares Gleichungssystem die Lösung $(x,y) = (2,3)$ hat, kann gefolgert werden, dass es ...

- ... mehr Unbekannte enthält als Gleichungen.
 ... zwei Gleichungen enthält.
 ... zwei Unbekannte enthält.
 ... zwei Lösungen hat.

Lösungen

- 6.1 a) $(x, y) = (5, -2)$
b) $(a, b) = (-11, 4)$
c) unendlich viele Lösungen
 $(x, y) = \left(x, \frac{5-4x}{3}\right) (x \in \mathbb{R})$
 $L = \left\{\left(x, \frac{5-4x}{3}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$
d) keine Lösung
 $L = \{ \}$
e) $(p, q) = (15/2, 3/2)$
f) $(x, y) = (-2, 7)$
g) unendlich viele Lösungen
 $(a, b) = \left(a, \frac{5(1+a)}{9}\right) (a \in \mathbb{R})$
 $L = \left\{\left(a, \frac{5(1+a)}{9}\right) : a \in \mathbb{R}\right\}$

6.2 a) $y = f(x) = -\frac{4}{7}x - \frac{1}{7}$

Hinweise:

- Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet $y = f(x) = ax + b$
- $P(5|-3)$ und $Q(-2|1)$ sind Punkte des Grafen der linearen Funktion. Daher müssen die Koordinaten von P und Q die Funktionsgleichung der linearen Funktion erfüllen, d.h. $-3 = f(5) = a \cdot 5 + b$ und $1 = f(-2) = a \cdot (-2) + b$
- Es muss also das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} -3 &= 5a + b \\ 1 &= -2a + b \end{aligned}$$

- b) $y = f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$
c) Steigung nicht definiert, also keine Funktion

6.3 a) $P(9/8 \mid -17/8)$

Hinweise:

- $P(x_1|y_1)$ sei ein Schnittpunkt der Grafen der beiden Funktionen f und g. Dann müssen die Koordinaten x_1 und y_1 die beiden Gleichungen $y_1 = f(x_1)$ und $y_1 = g(x_1)$ erfüllen.
- Es muss also das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned} y &= -3x + \frac{5}{4} \\ y &= -x - 1 \end{aligned}$$

- b) kein Schnittpunkt, da die Grafen parallel sind

6.4 A: 40 Angestellte B: 80 Angestellte

Hinweise:

- Übersetzen Sie die beiden Aussagen der Manager in zwei Gleichungen, d.h. in ein System zweier linearer Gleichungen, in welchem die Zahl der Angestellten die Unbekannten sind.
- Lösen Sie das Gleichungssystem.

6.5 $a = -\frac{1}{6}$ $b = \frac{5}{6}$

6.6 1. Preis = 1500 CHF 2. Preis = 900 CHF 3. Preis = 600 CHF

6.7 $(v, m, s, t) := (\text{Alter Vater, Alter Mutter, Alter Sohn, Alter Tochter})$

2 Lösungen: $(v, m, s, t)_1 = (54, 48, 28, 16)$
 $(v, m, s, t)_2 = (38, 40, 12, 8)$

6.8 Red Tide

Gesamtkosten $K_1(x) = (160x + 90'000)$ CHF

Ertrag $E_1(x) = 510x$ CHF

Gewinn $G_1(x) = E_1(x) - K_1(x) = (350x - 90'000)$ CHF

Blue Flake

Gesamtkosten $K_2(x) = (160x + 80'000)$ CHF

Ertrag $E_2(x) = 500x$ CHF

Gewinn $G_2(x) = E_2(x) - K_2(x) = (340x - 80'000)$ CHF

$G_2(x) = G_1(x)$

$\Rightarrow x = 1000, G_1(1000) = G_2(1000) = 260'000$ CHF
1000 Paare Skis, Gewinn = 260'000 CHF

- 6.9 a) 4. Aussage
b) 1. Aussage
c) 3. Aussage