

Repetitions-Aufgaben 2

Differentialrechnung, Integralrechnung

Aufgaben

R2.1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) "Die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer Funktion ist eine Funktion."
- b) "Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist eine Zahl."
- c) "Die Funktion f hat ein lokales Maximum bei $x = x_1$, falls $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$."
- d) "Falls $f''(x_2) = 0$ und $f'''(x_2) < 0$, dann hat die Funktion f einen Wendepunkt bei $x = x_2$."
- e) "Falls $g' = f$, dann ist g eine Stammfunktion von f ."
- f) " f mit $f(x) = 2x + 20$ ist eine Stammfunktion von g mit $g(x) = x^2$."
- g) " f mit $f(x) = 3x$ hat unendlich viele Stammfunktionen."
- h) "Das unbestimmte Integral einer Funktion ist eine Menge von Funktionen."

R2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert $f(x_0)$, die erste Ableitung $f'(x_0)$ und die zweite Ableitung $f''(x_0)$ der Funktion f an der Stelle x_0 :

- a) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$ $x_0 = -1$
- b) $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$ $x_0 = -2$
- c) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{-3x}$ $x_0 = -\frac{1}{3}$

R2.3 Bestimmen Sie für die gegebene Gesamtkostenfunktion $K(x)$ und Ertragsfunktion $E(x)$...

- i) ... die Grenzkostenfunktion $K'(x)$.
- ii) ... die Grenzertragsfunktion $E'(x)$.
- iii) ... die Grenzgewinnfunktion $G'(x)$.
- a) $K(x) = (40x + 200)$ CHF $E(x) = 60x$ CHF
- b) $K(x) = (5x^2 + 20x + 100)$ CHF $E(x) = (-2x^2 + 100x)$ CHF
- c) $K(x) = (20x^2 + 50 + 3e^{4x})$ CHF $E(x) = (200x - e^{4x^2})$ CHF

R2.4 Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die gegebene Funktion ...

- i) ... ein lokales Maximum hat.
... ein lokales Minimum hat.
- ii) ... einen Wendepunkt hat.
- a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
- b) $f(x)$ wie in R2.2 a)

R2.5 Die Ertragsfunktion für eine Ware oder eine Dienstleistung ist gegeben durch

$$E(x) = (-0.01x^2 + 36x) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie den maximalen Ertrag, falls die Produktion auf höchstens 1500 Einheiten begrenzt ist.

- R2.6 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Ware oder eine Dienstleistung sind

$$K(x) = (x^2 + 100) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten x , bei welcher die Produktion oder Erbringung zu minimalen Durchschnittskosten führt.

Bestimmen Sie auch diese minimalen Durchschnittskosten.

- R2.7 Eine Firma kann pro Monat nur 1000 Einheiten herstellen. Die monatlichen Gesamtkosten sind gegeben durch

$$K(x) = (200x + 300) \text{ CHF}$$

wobei x die hergestellte Stückzahl ist. Angenommen, der Ertrag ist gegeben durch

$$E(x) = \left(-\frac{1}{100}x^2 + 250x\right) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie die Stückzahl, bei welcher die Firma einen maximalen Gewinn erzielt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

- R2.8 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6) \, dx$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right) \, dx$

- R2.9 Die Funktionsgleichung der dritten Ableitung f''' einer Funktion ist wie folgt gegeben:

$$f'''(x) = 3x + 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f , so dass $f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$ und $f(0) = 2$.

- R2.10 Angenommen, die Grenzkosten für die Herstellung eines Produktes oder die Erbringung einer Dienstleistung sind $K'(x) = (5x + 10)$ CHF, wobei die Fixkosten 800 CHF betragen.

Bestimmen Sie die Gesamtkosten für die Herstellung oder Erbringung von 20 Einheiten.

- R2.11 Die Grenzkosten $K'(x)$ und die Ableitung des Durchschnittsertrages $\bar{E}'(x)$ einer bestimmten Firma sind wie folgt gegeben:

$$K'(x) = (6x + 60) \text{ CHF}$$

$$\bar{E}'(x) = -1 \text{ CHF}$$

Bei der Produktion oder Erbringung von 10 Einheiten sind die Gesamtkosten 1000 CHF und der Ertrag 1700 CHF.

Bestimmen Sie die Anzahl Einheiten x , welche zu einem maximalen Gewinn führt.

Bestimmen Sie auch diesen maximalen Gewinn.

- R2.12 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = (4x + 4) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-x^2 + 49) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und die Produzentenrente.

R2.13 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = \left(ax^2 - \frac{6}{5}x + 2 \right) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-bx^2 + 110) \text{ CHF}$$

mit den unbekannten Parametern a und b. Der Gleichgewichtspreis ist 10 CHF, und die Produzentenrente beträgt 73.33 CHF (gerundet).

Bestimmen Sie die beiden unbekannten Parameter a und b.

Hinweis:

- Verwenden Sie den ungerundeten Wert $\left(73 + \frac{1}{3} \right) \text{ CHF} = \frac{220}{3} \text{ CHF}$ für die Produzentenrente.

Lösungen

- R2.1 a) wahr
 b) wahr
 c) falsch
 d) wahr
 e) wahr
 f) falsch
 g) wahr
 h) wahr

R2.2 a) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$ $f(-1) = 0$
 $f'(x) = 16x^3 - 8x$ $f'(-1) = -8$
 $f''(x) = 48x^2 - 8$ $f''(-1) = 40$

 b) $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$ $f(-2) = -17 \cdot e^{-2} = -2.300\dots$
 $f'(x) = (-3x^2 - 4x + 1) \cdot e^x$ $f'(-2) = -3 \cdot e^{-2} = -0.406\dots$
 $f''(x) = (-3x^2 - 10x - 3) \cdot e^x$ $f''(-2) = 5 \cdot e^{-2} = 0.676\dots$

 c) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{-3x}$ $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{9}e = 5.738\dots$
 $f'(x) = (-3x^2 + 2x - 6) \cdot e^{-3x}$ $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -7e = -19.027\dots$
 $f''(x) = (9x^2 - 12x + 20) \cdot e^{-3x}$ $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 25e = 67.957\dots$

R2.3 a) i) $K'(x) = 40$ CHF
 ii) $E'(x) = 60$ CHF
 iii) $G'(x) = E'(x) - K'(x) = 20$ CHF

 b) i) $K'(x) = (10x + 20)$ CHF
 ii) $E'(x) = (-4x + 100)$ CHF
 iii) $G'(x) = E'(x) - K'(x) = (-14x + 80)$ CHF

 c) i) $K'(x) = (40x + 12e^{4x})$ CHF
 ii) $E'(x) = (200 + 8x e^{-4x^2})$ CHF
 iii) $G'(x) = E'(x) - K'(x) = (-40x + 200 - 12e^{4x} + 8x e^{-4x^2})$ CHF

R2.4 a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
 $f''(x) = 12x - 18$
 $f'''(x) = 12$

 i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$
 $f''(x_1) = -6 < 0$ $\Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_1 = 1$
 $f''(x_2) = 6 > 0$ $\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_2 = 2$

 ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{3}{2}$
 $f'''(x_3) = 12 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_3 = \frac{3}{2}$

 b) (siehe nächste Seite)

b) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1) = 4x^4 - 4x^2$
 $f'(x) = 16x^3 - 8x$
 $f''(x) = 48x^2 - 8$
 $f'''(x) = 96x$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
 $f''(x_1) = -8 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_1 = 0$
 $f''(x_2) = 16 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $f''(x_3) = 16 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ und $x_5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$
 $f'''(x_4) = \frac{96}{\sqrt{6}} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}$
 $f'''(x_5) = -\frac{96}{\sqrt{6}} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

R2.5 **Lokales** Maximum bei $x = 1800$ liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \leq x \leq 1500$.
 $E(1500) = 31'500 \text{ CHF} > E(0) = 0 \text{ CHF}$
 $\Rightarrow E = 31'500 \text{ CHF}$ ist der **globale** maximale Ertrag bei $x = 1500$.

R2.6 $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \left(x + \frac{100}{x}\right) \text{ CHF}$
 $\bar{K}(x)$ hat ein **lokales** Minimum bei $x_1 = 10$.
 $\bar{K}(10) = 20 \text{ CHF}$
 $\bar{K}(x) > \bar{K}(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein lokales Maximum gibt.
 $\Rightarrow \bar{K} = 20 \text{ CHF}$ sind die **globalen** minimalen Durchschnittskosten bei $x = 10$.

R2.7 $G(x) = E(x) - K(x) = \left(-\frac{1}{100}x^2 + 50x - 300\right) \text{ CHF}$
 $G(x)$ hat ein **lokales** Maximum bei $x_1 = 2500$. Dieses liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \leq x \leq 1000$.
 $G(1000) = 39'700 \text{ CHF} > G(0) = -300 \text{ CHF}$
 $\Rightarrow G = 39'700 \text{ CHF}$ ist der **globale** maximale Gewinn am Endpunkt $x = 1000$.

R2.8 a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6) dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - 6x + C$
b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right) dx = \frac{1}{14}x^7 + \frac{2}{9x^3} + C$

R2.9 $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + x + 2$

R2.10 $K(20) = 2000 \text{ CHF}$

Hinweis:

- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = \left(\frac{5}{2}x^2 + 10x + 800\right) \text{ CHF}$

R2.11 (siehe nächste Seite)

R2.11 $G = 800$ CHF ist der globale maximale Gewinn bei $x = 15$ Einheiten.

Hinweise:

- Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = (3x^2 + 60x + 100)$ CHF
- Bestimmen Sie die Durchschnittsertragsfunktion $\bar{E}(x) \Rightarrow \bar{E}(x) = (-x + C)$ CHF
- Bestimmen Sie die Ertragsfunktion $E(x) \Rightarrow E(x) = (-x^2 + 180x)$ CHF
- Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x) \Rightarrow G(x) = (-4x^2 + 120x - 100)$ CHF
- Die Gewinnfunktion $G(x)$ ist eine quadratische Funktion.
- Denken Sie an den Grafen der Gewinnfunktion, wenn Sie das globale Maximum bestimmen.

R2.12 Gleichgewichtsmenge

$$x = 5$$

Gleichgewichtspreis

$$p = 24 \text{ CHF}$$

Konsumentenrente

$$CS = 83.33 \text{ CHF (gerundet)}$$

Produzentenrente

$$PS = 50 \text{ CHF}$$

R2.13 $a = 1$

$$b = 0.2$$