

## Repetitions-Aufgaben 2                      Differentialrechnung, Integralrechnung

### Aufgaben

R2.1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) "Die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer Funktion ist eine Funktion."
- b) "Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist eine Zahl."
- c) "Die Funktion  $f$  hat ein lokales Maximum bei  $x = x_1$ , falls  $f'(x_1) = 0$  und  $f''(x_1) > 0$ ."
- d) "Falls  $f''(x_2) = 0$  und  $f'''(x_2) < 0$ , dann hat die Funktion  $f$  einen Wendepunkt bei  $x = x_2$ ."
- e) "Falls  $g' = f$ , dann ist  $g$  eine Stammfunktion von  $f$ ."
- f) " $f$  mit  $f(x) = 2x + 20$  ist eine Stammfunktion von  $g$  mit  $g(x) = x^2$ ."
- g) " $f$  mit  $f(x) = 3x$  hat unendlich viele Stammfunktionen."
- h) "Das unbestimmte Integral einer Funktion ist eine Menge von Funktionen."

R2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert  $f(x_0)$ , die erste Ableitung  $f'(x_0)$  und die zweite Ableitung  $f''(x_0)$  der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ :

- a)  $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$                        $x_0 = -1$
- b)  $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1) \cdot e^x$                        $x_0 = -2$
- c)  $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{-3x}$                        $x_0 = -\frac{1}{3}$

R2.3 Bestimmen Sie für die gegebene Gesamtkostenfunktion  $K(x)$  und Ertragsfunktion  $E(x)$  ...

- i) ... die Grenzkostenfunktion  $K'(x)$ .
- ii) ... die Grenzertragsfunktion  $E'(x)$ .
- iii) ... die Grenzgewinnfunktion  $G'(x)$ .
- a)  $K(x) = (40x + 200)$  CHF                       $E(x) = 60x$  CHF
- b)  $K(x) = (5x^2 + 20x + 100)$  CHF                       $E(x) = (-2x^2 + 100x)$  CHF
- c)  $K(x) = (20x^2 + 50 + 3e^{4x})$  CHF                       $E(x) = (200x - e^{-4x^2})$  CHF

R2.4 Bestimmen Sie für die Funktion  $f$  ...

- i) ... die lokalen Maxima und Minima.
- ii) ... die Wendepunkte.
- a)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
- b)  $f(x)$  wie in R2.2 a)

R2.5 Die Ertragsfunktion für eine Ware oder eine Dienstleistung ist gegeben durch

$$E(x) = (-0.01x^2 + 36x) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie den maximalen Ertrag, falls die Produktion auf höchstens 1500 Einheiten begrenzt ist.

R2.6 Angenommen, die Gesamtkosten für eine Ware oder eine Dienstleistung sind

$$K(x) = (x^2 + 100) \text{ CHF}$$

Die Produktion oder Erbringung wievieler Einheiten  $x$  führt zu minimalen Durchschnittskosten?  
Bestimmen Sie diese minimalen Durchschnittskosten.

R2.7 Eine Firma kann pro Monat nur 1000 Einheiten herstellen. Die monatlichen Gesamtkosten sind gegeben durch

$$K(x) = (200x + 300) \text{ CHF}$$

wobei  $x$  die hergestellte Stückzahl ist. Angenommen, der Ertrag ist gegeben durch

$$E(x) = \left(-\frac{1}{100}x^2 + 250x\right) \text{ CHF}$$

Wieviele Einheiten sollte die Firma herstellen für einen maximalen Gewinn?  
Bestimmen Sie diesen maximalen Gewinn.

R2.8 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a)  $\int (x^4 - 3x^3 - 6) \, dx$

b)  $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right) \, dx$

R2.9 Die Funktionsgleichung der dritten Ableitung  $f'''$  einer Funktion ist wie folgt gegeben:

$$f'''(x) = 3x + 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $f$ , so dass  $f''(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f(0) = 2$

R2.10 Angenommen, die Grenzkosten für die Herstellung eines Produktes oder die Erbringung einer Dienstleistung sind  $K'(x) = (5x + 10)$  CHF, wobei die Fixkosten 800 CHF betragen.

Was sind die Gesamtkosten für die Herstellung oder Erbringung von 20 Einheiten?

R2.11 Die Grenzkosten  $K'(x)$  und die Ableitung des Durchschnittsertrages  $\bar{E}'(x)$  einer bestimmten Firma sind wie folgt gegeben:

$$K'(x) = (6x + 60) \text{ CHF}$$

$$\bar{E}'(x) = -1 \text{ CHF}$$

Bei der Produktion oder Erbringung von 10 Einheiten sind die Gesamtkosten 1000 CHF und der Ertrag 1700 CHF.

Wieviele Einheiten führen zu einem maximalen Gewinn?  
Bestimmen Sie diesen maximalen Gewinn.

R2.12 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = (4x + 4) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-x^2 + 49) \text{ CHF}$$

Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und die Produzentenrente beim Marktgleichgewicht.

R2.13 Die Angebotsfunktion für ein Produkt oder eine Dienstleistung ist

$$p = f_A(x) = \left( ax^2 - \frac{6}{5}x + 2 \right) \text{ CHF}$$

und die Nachfragefunktion ist

$$p = f_N(x) = (-bx^2 + 110) \text{ CHF}$$

mit den unbekanntenen Parametern a und b. Der Gleichgewichtspreis ist 10 CHF, und die Produzentenrente beträgt 73.33 CHF (gerundet).

Bestimmen Sie die beiden unbekanntenen Parameter a und b.

Hinweis:

- Verwenden Sie den ungerundeten Wert  $\left( 73 + \frac{1}{3} \right) \text{ CHF} = \frac{220}{3} \text{ CHF}$  für die Produzentenrente.