

## Aufgaben-Hinweise Integralrechnung (Skriptum, Abschnitt 5.4, Seite 34)

7. Zuerst müssen die Nullstellen bestimmt werden.

Es ist zu berücksichtigen, dass das bestimmte Integral negativ ist, wenn der Graf unterhalb der  $x$ -Achse verläuft.

a) Nullstellen:  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 1$

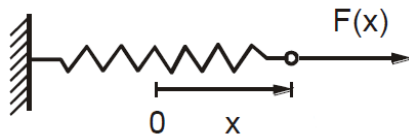
b) Nullstellen:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4$

8. Zuerst müssen die Schnittpunkte der beiden Grafen bestimmt werden.

Die Schnittpunkte liegen bei  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$ .

9. Zwei benachbarte Schnittpunkte von Sinus- und Cosinuskurve sind z.B.  $x_1 = \frac{\pi}{4}$  und  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ .

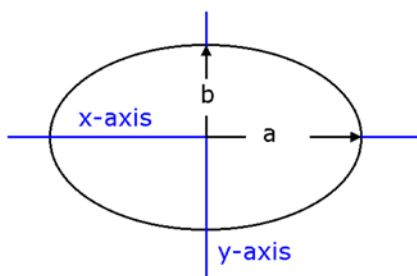
10. Die Kraft  $F$ , mit der an der Feder gezogen werden muss, um die Verlängerung  $x$  zu bewirken, ist proportional zur Verlängerung  $x$ , d.h.  $F = k \cdot x$



Die Kraft  $F$  kann als Funktion der Verlängerung  $x$  aufgefasst werden, d.h.  $F = F(x)$ .

Die in der Feder gespeicherte Energie bei einer Verlängerung von  $x = x_1$  ist gleich der Fläche zwischen dem Grafen von  $F$  und der  $x$ -Achse im Intervall  $[0, x_1]$ .

11. Es handelt sich hier um eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Hauptachse mit der  $x$ -Achse zusammenfällt:



Die allgemeine Gleichung einer solchen Ellipse lautet

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Es genügt, nur die obere Halbellipse (den Teil der Ellipse oberhalb der  $x$ -Achse) um die  $x$ -Achse zu rotieren, um den Rotationskörper zu erzeugen.

Die obere Halbellipse ist als Graf einer Funktion aufzufassen. Die Gleichung dieser Funktion erhält man durch Auflösen der Ellipsengleichung nach  $y$ .

$$\text{Funktionsgleichung: } y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Die Ellipse schneidet die  $x$ -Achse an den Stellen  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 2$ .

12. Hier muss ein Integral der folgenden Form berechnet werden:

$$\int \sin^2(ax) \, dx$$

Laut einer Integraltabelle gilt:

$$\int \sin^2(ax) \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$$

Im vorliegenden Fall hat der Parameter  $a$  den Wert 1, also  $a = 1$ .