Zusatz-Aufgaben 5 Grundlagen der Wellenlehre
Stehende Wellen, Eigenschwingungen

Lernziele

- verstehen, wie eine stehende Welle entsteht.
- eine Eigenschwingung auf einem eindimensionalen Wellenträger als Überlagerung zweier entgegenlaufender Wellen verstehen.
- Beispiele von stehenden Wellen kennen.
- verstehen, dass sich auf einem endlichen Wellenträger nur bei bestimmten Frequenzen eine stehende Welle bzw. eine Eigenschwingung bildet.
- den Zusammenhang zwischen der Länge eines eindimensionalen Wellenträgers und den Wellenlängen bzw. Frequenzen der möglichen Eigenschwingungen kennen und anwenden können.
- eine neue Problemstellung selbstständig bearbeiten können.

Aufgaben

5.1 Laufen zwei lineare harmonische Wellen gleicher Kreisfrequenz ω und gleicher Amplitude $\hat{y}$ gegeneinander und überlagern sich, so entsteht eine stehende Welle. Die Wellengleichung der stehenden Welle lautet wie folgt (siehe Skript Seite 53):

$$y(x,t) = \left(2\hat{y} \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right) \cdot \sin(\omega t)$$

a) * Studieren Sie im Skript auf der Seite 53 die Herleitung dieser Beziehung.

Hinweis:
- Die Summe zweier Sinusfunktionen kann als Produkt einer Cosinus- und einer Sinusfunktion geschrieben werden (ohne Beweis):

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

b) Bestimmen Sie die Stellen x, an welchen sich ...

i) ... die Wellenbäuche der stehenden Welle befinden.

ii) ... die Knoten der stehenden Welle befinden.

c) Vergleichen Sie den Abstand d zweier benachbarter Wellenbäuche bzw. Knoten der stehenden Welle mit der Wellenlänge λ der gegeneinander laufenden Einzelwellen.

5.2 Im Unterricht wurde gezeigt, wie man stehende Wellen bzw. Eigenschwingungen auf einem eindimensionalen, endlichen Wellenträger zeichnerisch darstellen kann.

Erstellen Sie eine Zeichnung für die Grundschwingung und die ersten vier Oberschwingungen für die drei Fälle a), b) und c):

Der Wellenträger hat ...

a) ... zwei feste Enden.

b) ... zwei freie Enden.

c) ... ein festes und ein freies Ende.

5.3 * Leiten Sie mit Hilfe Ihrer Zeichnungen aus der Aufgabe 5.2 für die drei in der Aufgabe 5.2 genannten Fälle a), b) und c) eine Beziehung zwischen der Frequenz f_n der n-ten Oberschwingung und der Frequenz f_0 der Grundschwingung her.

Vorgehen:

i) Finden Sie mit Hilfe der Zeichnung einen Zusammenhang zwischen der Grundwellenlänge λ_0 und der Länge l des Wellenträgers. Drücken Sie λ_0 durch l aus.

ii) Finden Sie mit Hilfe der Zeichnung einen Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ_n der n-ten Oberschwingung (n = 1, 2, 3, ...), der Zahl n und der Länge l des Wellenträgers. Drücken Sie λ_n durch n und l aus.

iii) Finden Sie mit Hilfe der Resultate aus i) und ii) einen Zusammenhang zwischen λ_n und λ_0. Drücken Sie λ_n durch λ_0 und n aus.

iv) Finden Sie mit Hilfe des Resultates aus iii) und der allgemeinen Beziehung $c = \lambda \cdot f$ einen Zusammenhang zwischen der Frequenz f_n der n-ten Oberschwingung und der Frequenz f_0 der Grundschwingung. Drücken Sie f_n durch f_0 und n aus.

v) Drücken Sie das Ergebnis aus iv) in Worten aus.
Welche Frequenzen treten in den Eigenschwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) im Vergleich zur Grundfrequenz auf?

5.4 Eine einseitig geschlossene Orgelpfeife ist auf den Grundton (Grundschwingung) der Frequenz 264 Hz abgestimmt.

a) Bestimmen Sie die Länge der Orgelpfeife.

Hinweise:
- Eine einseitig geschlossene Orgelpfeife kann als Wellenträger mit einem festen und einem freien Ende aufgefasst werden.
- Mit Hilfe Ihrer Zeichnungen aus der Aufgabe 5.2 c) kann ein Zusammenhang zwischen der Länge der Orgelpfeife und der Wellenlänge der Grundschwingung bestimmt werden.
- Der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Frequenz ist gegeben durch $c = \lambda \cdot f$.
- Rechnen Sie mit einer Schallgeschwindigkeit von c = 344 m/s.

b) Geben Sie die Frequenzen der ersten drei Obertöne (Oberschwingungen) an.

Hinweis:
- Die Beziehung zwischen den Frequenzen von Grundschwingung und Oberschwingungen kann in der Lösung der Aufgabe 5.3 c) iv) nachgeschlagen werden.

5.5 Von einer beidseitig offenen Orgelpfeife kennt man die Frequenzen von drei benachbarten Obertönen:

466.2 Hz   582.7 Hz   699.2 Hz

a) Geben Sie an, den wievielten Obertönen die angegebenen Frequenzen entsprechen.

Hinweis:
- Die Beziehung zwischen den Frequenzen von Grundschwingung und Oberschwingungen kann in der Lösung der Aufgabe 5.3 b) iv) nachgeschlagen werden.

b) Bestimmen Sie die Länge der Orgelpfeife.

Hinweis:
- (vgl. Hinweise zu Aufgabe 5.4 a))

Lösungen

5.1 a) * ...

b) i) $x = k \cdot \frac{\lambda}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Hinweis: Die Wellenbäuche befinden sich an denjenigen Stellen x, an welchen die Cosinusfunktion den Wert 1 oder -1 annimmt.

ii) $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Hinweis: Die Knoten befinden sich an denjenigen Stellen x, an welchen die Cosinusfunktion den Wert 0 annimmt.

c) $d = \frac{\lambda}{2}$

5.2 ...

5.3 * a) i) $l = \frac{\lambda_0}{2}$ $\Rightarrow$ $\lambda_0 = 2l$

ii) $l = (n + 1)\frac{\lambda_n}{2}$ $\Rightarrow$ $\lambda_n = \frac{2}{n+1}\, l$

iii) $\lambda_n = \frac{1}{n+1}\,\lambda_0$

iv) $c = \lambda_0 \cdot f_0$, $c = \lambda_n \cdot f_n$, $\lambda_n = \frac{1}{n+1}\,\lambda_0$ $\Rightarrow$ $f_n = (n + 1)\, f_0$

v) In den Eigenschwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) treten als Frequenzen **alle ganzzahligen Vielfache** der Grundfrequenz auf:
f_0, $2 \cdot f_0$, $3 \cdot f_0$, ...

b) wie bei a)

c) i) $l = \frac{\lambda_0}{4}$ $\Rightarrow$ $\lambda_0 = 4l$

ii) $l = (2n + 1)\frac{\lambda_n}{4}$ $\Rightarrow$ $\lambda_n = \frac{4}{2n+1}\, l$

iii) $\lambda_n = \frac{1}{2n+1}\,\lambda_0$

iv) $c = \lambda_0 \cdot f_0$, $c = \lambda_n \cdot f_n$, $\lambda_n = \frac{1}{2n+1}\,\lambda_0$ $\Rightarrow$ $f_n = (2n + 1)\, f_0$

v) In den Eigenschwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) treten als Frequenzen **nur die ungeraden ganzzahligen Vielfache** der Grundfrequenz auf:
f_0, $3 \cdot f_0$, $5 \cdot f_0$, ...

5.4 a) $l = 32.6$ cm

Hinweis: Es gilt $l = \frac{\lambda_0}{4}$ und $c = \lambda_0 \cdot f_0$

b) 1. Oberschwingung: $f_1 = 3f_0 = 792$ Hz
2. Oberschwingung: $f_2 = 5f_0 = 1320$ Hz
3. Oberschwingung: $f_3 = 7f_0 = 1848$ Hz

5.5 a) 3., 4. und 5. Oberschwingung

Hinweis: Die Grundfrequenz beträgt $f_0 = 116.5$ Hz.

b) $l = 1.48$ m